

Chapitre 1

Géométrie de base

Contenu du chapitre

1	Espace vectoriel - Espace affine	6
1.1	Définitions	6
1.2	Règles de calcul	8
1.3	Changement de repère en coordonnées cartésiennes	13
2	Transformations géométriques sur des points	15
2.1	Classes de transformations	16
2.2	Composition de transformations	18
2.3	Transformations affines élémentaires	21
2.4	Transformations et compositions classiques	25
3	Modèle géométrique de l'appareil photographique	30
3.1	Repères et observation	31
3.2	Mise en perspective et projection	33
3.3	Analogie avec l'appareil photographique	37
3.4	Retour à la grille de l'écran : film photographique virtuel	41
3.5	Pour aller plus loin dans les modèles d'appareils photographiques	43
4	Objets géométriques élémentaires	43
4.1	Équation d'une surface	44
4.2	Objets géométriques élémentaires	49
4.3	Transformation affine d'un objet	54
5	Construction d'une scène ou d'objets complexes	59
5.1	Modèle hiérarchique	59
5.2	Algèbre sur des objets	64

6	Annexe	67
6.1	systèmes de coordonnées	67

La géométrie est l'élément constitutif essentiel de toute image de synthèse :

- Les objets présents dans une image de synthèse sont toujours définis à partir d'objets géométriques dont l'expression mathématique est connue.
- Ces objets ainsi que l'organisation spatiale de ces objets les uns par rapport aux autres forment un modèle géométrique complet de la scène virtuelle à représenter et constituent un pré-requis essentiel.
- L'image de synthèse obtenue est le résultat de l'interaction entre les différentes sources de lumière de la scène et les objet. Cette interaction s'évalue à partir des caractéristiques physiques des objets et des sources de lumières, et des propriétés géométriques locales en tout point de la scène (géométrie locale) et globales (chaque objet interagit avec une partie ou la totalité de la scène).

La maîtrise des notions de géométrie présentées dans ce chapitre est donc primordiale pour la compréhension et la mise en place de la grande majorité des méthodes présentées dans ce cours. Ce chapitre contient le rappel de beaucoup de notions triviales, mais que nous avons tenu à replacer dans le cadre de la synthèse d'images.

1 Espace vectoriel - Espace affine

On rappelle dans cette partie les us et coutumes des espaces vectoriels et des espaces affines en se concentrant sur leurs aspects géométriques utiles à la synthèse d'images.

1.1 Définitions

Derrière les appellations rigides d'espaces vectoriels et affines se trouvent deux concepts intuitivement simples :

Un espace vectoriel est l'espace où vivent les vecteurs (déplacements ou directions).

Ses principales propriétés sont l'existence d'un vecteur nul et la stabilité de l'espace pour toute combinaison linéaire de vecteurs.

Un espace affine est l'espace dans lequel vivent les points à partir desquels on définit les objets géométriques usuels (droites, ...). Il se construit à partir d'un point de référence (l'origine) et d'un espace vectoriel (déplacements autorisés à partir de ce point).

Nous ne détaillons pas ici les propriétés et structures nécessaires à la construction d'un espace affine ou d'un espace vectoriel. Le lecteur intéressé pourra se reporter à ???. Par ailleurs, les modes opératoires dans ces différents espaces seront rappelés dans la section suivante.

Une base de vecteurs associée à un espace vectoriel permet l'écriture unique de tout vecteur de l'espace vectoriel comme combinaison linéaire d'un *petit nombre*¹ de vecteurs (=la base). Plus formellement, soit E un espace vectoriel de dimension n , soit $\{e_i\}_{i=1..n}$ une famille de vecteurs de E . Alors cette famille est une base si et seulement si² : $\forall \mathbf{U} \in E, \exists! \{u_i\}_{i=1..n} \in \mathbb{R}^n$;

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n u_i \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{e} \quad \text{avec} \quad \mathbf{U}^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix}$$

\mathbf{U} est le vecteur (matriciel) contenant les coordonnées du vecteur \mathbf{U} dans la base $\{e_i\}$.

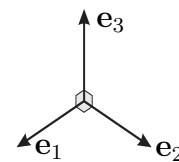
Symétriquement, une base dans un espace affine (également appelé repère) est défini comme un couple (origine, base de vecteurs). Chaque point P de l'espace affine est atteint par un déplacement (en utilisant une combinaison linéaire unique des vecteurs de la base de vecteurs $\sum_i p_i \cdot e_i$) à partir de l'origine du repère O . Formellement, on écrit :

$$P = O + \sum_{i=1}^n p_i \cdot e_i = O + \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{e} \quad \text{avec} \quad \mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix}$$

Attention, dans cette équation, O et P sont des lieux géométriques, et non les coordonnées de ces points (*i.e.* cette équation est valide dans tous les repères). Comme précédemment, le vecteur (matriciel) \mathbf{P} contient les coordonnées du point P dans le repère $(O, \{e_i\})$.

Dans les applications qui nous intéressent, n est égal à 2 ou 3, et les bases $\{e_i\}$ que nous considérerons seront toujours orthonormées, c'est-à-dire :

- chaque vecteur e_i de la base est un déplacement de longueur unité.
- pour tout couple de vecteur (e_i, e_j) avec $i \neq j$, e_i est orthogonal à e_j .



et correspondent aux repères de la géométrie traditionnelle dont nous avons l'habitude, soit lorsque nous dessinons des objets bidimensionnels sur une feuille, soit lorsque nous plaçons des objets tridimensionnels dans l'espace. On rappelle que le repère canonique orthonormé :

¹Ce nombre est la dimension de l'espace. Donc, 3 pour \mathbb{R}^3 .

²cette propriété revient à dire que la famille est libre et génératrice.

- pour l'espace **vectoriel** \mathbb{R}^3 est constitué par le triplet de vecteurs suivants : $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ 0]$, $\mathbf{e}_2 = [0 \ 1 \ 0]$ et $\mathbf{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]$.
- pour l'espace **affine** \mathbb{R}^3 est constitué du point O centre du repère (donc de coordonnées $(0, 0, 0)$) et des trois vecteurs précédents qui définissent chacun avec le centre O l'un des 3 axes Ox , Oy , Oz .

Par la suite, nous continuerons à suivre les règles d'écriture et de notation suivante :

Notations : \mathbf{V} vecteur \mathbf{V} (gras).
 $V = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$ coordonnées du vecteur \mathbf{V} .
 A point A .
 $A = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ coordonnées du point A .

1.2 Règles de calcul

Nous rappelons maintenant les méthodes de calcul de base dans les espaces vectoriels et affines. La présentation est faite également comme une liste non exhaustive des fonctions typées de calcul géométrique élémentaire à implémenter (le type est indiqué en italique). On indique également leurs applications usuelles.

1.2.1 Opérations sur les vecteurs

somme de déplacements

$$\text{vecteur } \mathbf{U} = \text{vecteur } \mathbf{V} + \text{vecteur } \mathbf{W}$$

On somme coordonnées par coordonnées : $u_i = v_i + w_i$.

changement d'échelle

$$\text{vecteur } \mathbf{U} = \text{reel } \lambda \bullet \text{vecteur } \mathbf{V}$$

La longueur du déplacement \mathbf{V} est multipliée par λ . Chaque coordonnée est multipliée par le scalaire λ : $u_i = \lambda \cdot v_i$.

application linéaire³

$$\text{vecteur } \mathbf{U} = \text{matrice } \mathbf{M} \bullet \text{vecteur } \mathbf{V}$$

Par calcul matriciel usuel, on a $u_i = \sum_j m_{ij} \cdot v_j$ où $M = \{m_{ij}\}$ est une matrice de taille 3×3 . L'utilisation principale est celle des changements de bases (voir la section 1.3) et les transformations géométriques (voir la section 2).

³On rappelle qu'une application linéaire sur un espace vectoriel est une application \mathcal{L} possédant la propriété suivante : $\mathcal{L}(\alpha \cdot \mathbf{U} + \beta \cdot \mathbf{V}) = \alpha \cdot \mathcal{L}(\mathbf{U}) + \beta \cdot \mathcal{L}(\mathbf{V})$ où \mathbf{U} et \mathbf{V} sont des vecteurs et α et β des scalaires quelconques.

norme d'un vecteur

$$\text{reel } r = \text{Norme}(\text{vecteur } \mathbf{U})$$

La norme d'un vecteur \mathbf{U} (notée $|\mathbf{U}|$) est la longueur de ce vecteur. Par conséquent, $r = |\mathbf{U}| = \sqrt{\sum_i u_i^2}$. Seul le vecteur nul est de longueur nulle.

normalisation d'un vecteur

$$\text{vecteur } \mathbf{V} = \text{Normalisation}(\text{vecteur } \mathbf{U})$$

Un vecteur \mathbf{U} est dit normalisé (ou normé) si sa norme est égale à 1 (i.e. $|\mathbf{U}| = 1$). Ainsi, pour tout vecteur \mathbf{U} non nul, $\mathbf{U}/|\mathbf{U}|$ est un vecteur normé. Donc $v_i = u_i/\text{Norme}(\mathbf{U})$.

produit scalaire

$$\text{reel } r = \text{vecteur } \mathbf{U} \bullet \text{vecteur } \mathbf{V}$$

Le produit scalaire est défini par : $r = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \sum_i u_i \cdot v_i$. Il possède les propriétés suivantes :

- si θ est l'angle entre les vecteurs \mathbf{U} et \mathbf{V} , alors $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = |\mathbf{U}| \cdot |\mathbf{V}| \cdot \cos \theta$.
On notera que toutes les propriétés suivantes sont des redites de cette première propriété.
- pour tout vecteur \mathbf{U} , alors $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = |\mathbf{U}|^2$.
- si les vecteurs \mathbf{U} et \mathbf{V} sont orthogonaux, alors $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = 0$.
- si les vecteurs \mathbf{U} et \mathbf{V} sont **normalisés** ($|\mathbf{U}| = |\mathbf{V}| = 1$), alors le produit scalaire $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$ est le cosinus de l'angle θ entre les deux vecteurs :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \cos \theta$$

Propriété essentielle : elle permet de calculer à peu de frais le cosinus d'un angle. On l'utilise notamment en permanence lors du calcul du rendu (voir par exemple section ?? sur le modèle de Phong).

- le signe du produit scalaire est une première indication sur l'angle θ entre deux vecteurs :

$$\begin{array}{ll} \text{si } \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} > 0 & \text{alors } 0 \leq \theta < \pi/2 \\ \text{si } \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = 0 & \text{alors } \theta = \pi/2 \\ \text{si } \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} < 0 & \text{alors } \pi/2 < \theta \leq \pi \end{array}$$

Propriété essentielle : en testant la positivité du produit scalaire, on détermine rapidement si une facette, dont la normale est \mathbf{U} , est visible depuis la direction \mathbf{V} . Voir la section ?? sur la notion de rejet trivial.

produit vectoriel

$$\text{vecteur } \mathbf{U} = \text{vecteur } \mathbf{V} \wedge \text{vecteur } \mathbf{W}$$

Le produit vectoriel est défini dans \mathbb{R}^3 par :

$$\begin{cases} u_1 &= v_2 \cdot w_3 - w_2 \cdot v_3 \\ u_2 &= v_3 \cdot w_1 - w_3 \cdot v_1 \\ u_3 &= v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2 \end{cases}$$

Le vecteur \mathbf{U} obtenu a les propriétés suivantes :

- Le vecteur \mathbf{U} est **normal** au plan vectoriel formé par les vecteurs \mathbf{V} et \mathbf{W} (**exception** : si $\mathbf{V} = \lambda \cdot \mathbf{W}$ (avec $\lambda \neq 0$), alors $\mathbf{U} = 0$). Donc :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{U} \cdot \mathbf{W} = 0$$

Propriété essentielle : elle permet notamment de calculer la normale à une surface à partir de deux vecteurs tangents. En particulier, on peut ainsi calculer la normale à un polygone planaire à partir de 3 de ses sommets non alignés.

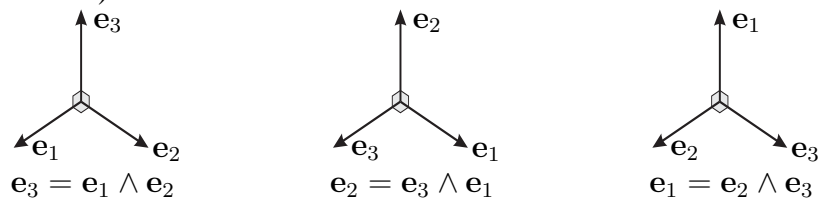
- $|\mathbf{U}| = |\mathbf{V}| \cdot |\mathbf{W}| \cdot |\sin \theta|$ où θ est l'angle entre les vecteurs \mathbf{V} et \mathbf{W} .

Propriété essentielle : les deux principales applications sont les suivantes :

- si les vecteurs \mathbf{V} et \mathbf{W} sont normalisés, on calcule ainsi **la valeur absolue** du sinus de l'angle. Cette propriété est à utiliser avec précaution puisque le signe de l'angle n'est pas connu.
- 3 points quelconques de l'espace (notés A , B et C) sont alignés si et seulement si $\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC} = \mathbf{0}$ (car alors $\theta = 0$ ou π).
- si A , B et C sont les trois sommets d'une facette, alors $|\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC}|/2$ est l'aire de la facette.

Le triplet de vecteurs (ou trièdre) $(\mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{U})$ est un trièdre **direct**. On peut ainsi construire facilement des bases orthonormées :

- En choisissant le sens du produit vectoriel, on peut construire un trièdre direct $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ en fonction de deux vecteurs de la base déjà connus (par permutation circulaire) :



- si les vecteurs \mathbf{V} et \mathbf{W} sont **normalisés et orthogonaux** (conséquence : $|\sin \theta| = 1$), alors \mathbf{U} est lui aussi normalisé. On évite ainsi une normalisation lors de la construction d'une base orthonormée.

1.2.2 Opération sur les points

vecteur associé à un couple de points

$$\text{vecteur } \mathbf{U} = \text{point } A - \text{point } B$$

On construit le vecteur $\mathbf{U} = \mathbf{BA}$ par simple différence entre les coordonnées des points : $u_i = a_i - b_i$. Par construction, on a évidemment $A = B + \mathbf{U}$ (i.e. le point A est le point B translaté du vecteur \mathbf{V}).

transformation affine

Une transformation affine est une application de la forme :

$$\text{point } A = \text{matrice } M \cdot \text{point } B + \text{vecteur } \mathbf{T}$$

qui applique une transformation géométrique sur le point B . Le point A obtenu est le résultat de deux transformations consécutives :

- une transformation linéaire représentée par la matrice M (rotation, changement d'échelle, skew, symétrie, ...).
- une translation de vecteur \mathbf{T} .

La construction des matrices de transformation est présentée en section 2. En raison des difficultés de compositions de plusieurs transformations affines (un besoin très fréquent), une gestion efficace des transformations affines s'effectue toujours en coordonnées homogènes (voir section 2.2.1).

distance euclidienne

$$\text{reel } d = \text{Distance}(\text{point } A, \text{point } B)$$

On utilise la distance Euclidienne classique : $d = \sqrt{\sum_i (a_i - b_i)^2}$. A noter que la distance entre les points A et B est égale à la norme du vecteur \mathbf{AB} .

1.2.3 Autres opérations importantes

barycentre Soit $\{P_i\}_{i=1..n}$ un ensemble de points, et $\{\lambda_i\}_{i=1..n}$ un ensemble de poids qui y est associé tel que $\sum_i \lambda_i = 1$. Alors le barycentre de cet ensemble de points pondérés est défini par :

$$G = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot P_i$$

Sortons du cadre général de ce rappel, et intéressons-nous au cas où :

- L'ensemble des $\{P_i\}$ sont les sommets d'un triangle (une facette).

– L'ensemble des poids est tel que $0 \leq \lambda_i \leq 1$ pour tout i , et $\sum_i \lambda_i = 1$. alors le point G est toujours inclus dans le triangle. Inversement, pour tout point du triangle, il n'existe qu'un seul triplet $\{\lambda_i\}$ permettant d'atteindre ce point. Cette propriété permet une paramétrisation agréable d'un triangle (voir la section 4.2.7).

L'utilisation du barycentre sur des polygones à $n > 3$ sommets peut s'avérer problématique car le polygone doit être convexe, les n sommets coplanaires et la paramétrisation n'est plus unique⁴, ce qui amène à ajouter des contraintes supplémentaires sur l'ensemble des $\{\lambda_i\}$.

$n = 2$ est un cas particulier de l'interpolation linéaire que nous abordons maintenant.

interpolation linéaire Nous commençons par un exemple classique. Considérons deux points A et B de l'espace. On veut construire une courbe C entre eux. Alors, l'interpolation linéaire entre ces deux points s'écrit :

$$\begin{cases} C(\lambda) = (1 - \lambda).A + \lambda.B \\ \text{avec } \lambda \in [0, 1] \end{cases} \quad (1.1)$$

Notons les valeurs particulières suivantes : pour $\lambda = 0$, $C(0) = A$; pour $\lambda = 1$, $C(1) = B$; pour $\lambda = 1/2$, $C(1/2) =$ milieu de AB . Le paramètre λ règle donc le "mélange" entre le point de départ et le point d'arrivée. La réécriture de 1.1 sous la forme $C(\lambda) = A + \lambda.AB$ met en évidence que $C(\lambda)$ est le segment de droite reliant ces deux points.

Plusieurs remarques de fond s'imposent :

- Le type d'interpolation que nous considérerons ici n'utilise que deux objets : un objet de départ et un objet d'arrivée. L'équation 1.1 sera donc toujours utilisée sous cette forme.
- L'adjectif linéaire signifie que l'interpolation se fait à *pente constante* ; autrement dit que la vitesse d'évolution de l'objet de départ vers l'objet d'arrivée est constante.
- Ne pas perdre de vue que tout type d'interpolation **crée de l'information**, et que celle-ci n'est approximativement adéquate **que** si l'hypothèse (ici de linéarité) est (presque) respectée par le modèle original d'évolution des objets.
- Il existe évidemment d'autres types d'interpolations. Les modèles de courbes et surfaces (bilinéaire, Bézier et Spline) donnés dans le chapitre ?? peuvent facilement s'adapter à d'autres besoins.

⁴considérer deux triangles distincts dont les sommets appartiennent à l'ensemble des sommets du polygone et qui se recouvrent partiellement. Alors il existe deux paramétrisations dans la zone de recouvrement.

- L'algorithme de Bresenham (voir section ??) s'adapte assez facilement pour faire de l'interpolation linéaire sur des grilles discrètes (tracé, z -buffer, espace des couleurs).

Nous complétons cette partie par un cas d'école. Soit A et B deux points de \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3) avec pour chacun une valeur ou un vecteur de valeurs associé (couleur, normale, ...) V_A et V_B . On veut tracer un trait continu $C(\lambda)$ entre ces deux points, et donner une valeur $V(\lambda)$ en tout point du trait (*i.e.* pour toute valeur de λ). On effectue deux interpolations linéaires :

$$\begin{cases} C(\lambda) = (1 - \lambda).A + \lambda.B \\ V(\lambda) = (1 - \lambda).V_A + \lambda.V_B \\ \text{avec } \lambda \in [0, 1] \end{cases}$$

La même valeur de λ est utilisée simultanément pour les deux équations ($C(\lambda), V(\lambda)$). Si V est un vecteur, l'interpolation a lieu composante par composante. Voir les parties sur les ombrages de Gouraud et de Phong pour un exemple d'application.

1.3 Changement de repère en coordonnées cartésiennes

Nous abordons maintenant les mécanismes des changements de repère. Bien qu'il s'agisse d'un type particulier de transformation linéaire ou affine, nous les abordons dans une section dédiée en raison de son importance et son aspect spécifique. La lecture de cette section est à compléter par celle sur l'écriture des transformations en coordonnées homogènes (voir section 2.4).

1.3.1 Cas des espaces vectoriels

Nous abordons dans un premier temps les changements de repère dans les espaces vectoriels car ils constituent une première étape pour la compréhension des changements de repère dans les espaces affines (le cas qui nous intéresse vraiment).

Soient $\{\mathbf{e}_i\}$ et $\{\mathbf{E}_i\}$ deux bases de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$. Par conséquent, tout vecteur \mathbf{V} de \mathcal{E} peut s'écrire, en reprenant les notations la section 1.1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \sum_i v_i \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{e} & \text{avec } \mathbf{v} &= [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T \\ &= \sum_i V_i \cdot \mathbf{E}_i = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{E} & \mathbf{V} &= [V_1 \quad V_2 \quad V_3]^T \end{aligned} \quad (1.2)$$

Supposons que l'on connaisse les coordonnées V du vecteur \mathbf{v} dans la base $\{\mathbf{e}_i\}$ et que l'on recherche ses coordonnées V dans la base $\{\mathbf{E}_i\}$. On exprime tout d'abord les

coordonnées de chaque vecteur de la base $\{\mathbf{E}_i\}$ dans la base $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1 = m_{11}.\mathbf{e}_1 + m_{12}.\mathbf{e}_2 + m_{13}.\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{E}_2 = m_{21}.\mathbf{e}_1 + m_{22}.\mathbf{e}_2 + m_{23}.\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{E}_3 = m_{31}.\mathbf{e}_1 + m_{32}.\mathbf{e}_2 + m_{33}.\mathbf{e}_3 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{E} = \mathbf{M}.\mathbf{e} \Leftrightarrow \mathbf{e} = \mathbf{M}^{-1}.\mathbf{E}$$

où $\mathbf{M} = \{m_{ij}\}$ est appelée la matrice de passage de la base $\{\mathbf{e}_i\}$ dans la base $\{\mathbf{E}_i\}$. Par construction, la matrice \mathbf{M} est inversible (les deux bases définissent le même espace \mathcal{E}). En reprenant l'équation 1.2, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^T.\mathbf{E} &= \mathbf{v}^T.\mathbf{e} \\ &= \mathbf{v}^T.\mathbf{M}^{-1}.\mathbf{E} \\ &= ((\mathbf{M}^{-1})^T.\mathbf{v})^T.\mathbf{E} \end{aligned}$$

Par conséquent, les coordonnées du vecteur \mathbf{V} dans la base $\{\mathbf{E}_i\}$ s'obtiennent par :

$$\mathbf{V} = (\mathbf{M}^{-1})^T.\mathbf{v}$$

Dans les cas où la matrice \mathbf{M} est orthogonale, on a $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$ (par définition⁵). L'équation devient :

$$\mathbf{V} = \mathbf{M}.\mathbf{v}$$

Or, dans les applications, la matrice \mathbf{M} est le plus souvent orthogonale car elle représente la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée. Notons encore qu'un changement de repère dans un espace vectoriel est une application linéaire.

1.3.2 Cas des espaces affines

Soit $(O, \{\mathbf{e}_i\})$ et $(O', \{\mathbf{E}_i\})$ deux repères dans l'espace affine \mathbb{R}^3 dont les origines sont respectivement en O et O' . Par conséquent, tout point A de \mathbb{R}^3 peut s'écrire, en reprenant les notations la section 1.1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= O + \sum_i a_i.\mathbf{e}_i = O + \mathbf{a}^T.\mathbf{e} & \text{avec } \mathbf{a} &= [a_1 \ a_2 \ a_3]^T \\ &= O' + \sum_i A_i.\mathbf{E}_i = O' + \mathbf{A}^T.\mathbf{E} & \mathbf{A} &= [A_1 \ A_2 \ A_3]^T \end{aligned} \quad (1.3)$$

Avant de traiter le cas général, voyons le cas particulier où le centre du repère ne change pas. Comme dans la section précédente, \mathbf{M} est la matrice de passage de \mathbf{e} dans \mathbf{E} .

⁵Ceci a notamment pour conséquence que $|\mathbf{M}| = 1$ (où $|\mathbf{M}|$ est le déterminant de \mathbf{M}). Une façon de s'assurer qu'une matrice est orthogonale est de vérifier que $\mathbf{M}.\mathbf{M}^T = \mathbf{I}$ où \mathbf{I} est la matrice identité.

cas $O = O'$

En reprenant l'équation 1.3 et en simplifiant par O , on obtient $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{e} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{E}$ ce qui est exactement la même équation obtenue dans le cas des espaces vectoriels. Par conséquent, $\mathbf{A} = (\mathbf{M}^{-1})^T \cdot \mathbf{a}$.

cas $O \neq O'$

Dans ce cas,

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{e} - (O' - O)$$

Or $O' - O$ est le déplacement relatif depuis O en O' . Autrement dit, si O' sont les coordonnées du point O' dans le repère $(O, \{\mathbf{e}_i\})$, $O' - O = O'^T \cdot \mathbf{e}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{e} - O'^T \cdot \mathbf{e} \\ &= (\mathbf{a} - O')^T \cdot \mathbf{e} \\ &= (\mathbf{a} - O')^T \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{E} \\ &= \left((\mathbf{M}^{-1})^T \cdot (\mathbf{a} - O') \right)^T \cdot \mathbf{E} \end{aligned}$$

Par conséquent, la forme générale d'un changement de repère d'un point A est :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{M}^{-1})^T \cdot (\mathbf{a} - O')$$

où \mathbf{M} est la matrice de passage de la base $\{\mathbf{e}_i\}$ dans la base $\{\mathbf{E}_i\}$

O' sont les coordonnées du point O' dans le repère initial $(O, \{\mathbf{e}_i\})$

\mathbf{a} sont les coordonnées du point A dans le repère initial $(O, \{\mathbf{e}_i\})$

\mathbf{A} sont les coordonnées du point A dans le repère final $(O', \{\mathbf{E}_i\})$

Si la matrice de passage \mathbf{M} est orthogonale, alors $(\mathbf{M}^{-1})^T = \mathbf{M}$. Ceci est généralement le cas en pratique, la formule à utiliser est par conséquent :

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} \cdot (\mathbf{a} - O') \tag{1.4}$$

On notera que cette transformation est la composition de deux transformations affines (en fait, une translation et une application linéaire). L'écriture de cette transformation en coordonnées homogènes est présentée à la section 2.4.

2 Transformations géométriques sur des points

Nous ne considérerons pour cet exposé que les transformations de \mathbb{R}^3 ; l'adaptation dans \mathbb{R}^2 étant généralement immédiate.

2.1 Classes de transformations

Avant de commencer une description des transformations géométriques, il est utile de connaître leurs classifications, ainsi que les différentes propriétés associées à chaque classe de transformation. Nous adopterons les notations suivantes :

- P sont les coordonnées du point original.
- P' sont les coordonnées du point transformé.
- A est une matrice de taille 3×3 .
- B et C sont deux vecteurs colonnes de taille 3×1 .

2.1.1 Transformations affines

Une transformation affine est une transformation de la forme :

$$P' = A.P + B$$

La majorité des transformations utilisées s'écrivent sous cette forme. Les transformations affines contiennent :

Les transformations rigides (ou Euclidiennes)

Une transformation rigide est une transformation affine telle que :

$$A^{-1} = A^T$$

On les appelle également transformations orthogonales⁶ ou encore isométrie. Elles ne déforment pas les objets transformés. **Un changement de repère depuis d'un repère orthogonal normé vers un repère orthogonal normé est une transformation rigide.**

Propriétés : – elles conservent les distances.
 – elles conservent les angles.
 – elles sont inversibles. L'inverse est une transformation rigide.
 – la composition de transformations rigides est une transformation rigide.

Exemples : l'identité, les translations, les rotations.

Les similitudes

Les similitudes sont des transformations affines possédant les propriétés suivantes :

⁶Une matrice telle que $A^{-1} = A^T$ est également dite orthogonale.

- Propriétés** : – elles multiplient les distances par un facteur constant.
 – elles conservent les angles.
 – elles conservent les formes (un cercle reste un cercle).
 – elles sont inversibles et l'inverse est une similitude.
 – elles contiennent les transformations rigides.

Exemples : les changements d'échelles, les symétries.

Propriétés des transformations affines générales

- elles conservent le plan affine.
- elles conservent les lignes parallèles.
- la transformation inversible seulement si $|A| \neq 0$.
- l'inverse d'une transformation affine est une transformation affine.

En inversant simplement son expression, on obtient :

$$P = A^{-1} \cdot (P' - B) = A^{-1} \cdot P' - A^{-1} \cdot B$$

qui est à son tour une transformation affine. On en déduit qu'une transformation affine n'est inversible que si la matrice A de la transformation l'est également.

- elles conservent le barycentre⁷. Cette propriété est fondamentale car elle signifie que la transformation d'un polygone par une transformation affine est un polygone dont les sommets sont les transformés des sommets du polygone initial (voir 4.3).

Un exemple de transformation affine qui ne soit ni une transformation rigide, ni une similitude est le cisaillement (ou shearing).

2.1.2 Transformations projectives

C'est l'ensemble de transformations le plus général que nous utiliserons. Cette transformation s'écrit :

$$P' = \frac{A \cdot P + B}{C \cdot P + 1}$$

Des exemples concrets de transformations projectives seront donnés dans la section ?? sur les projections et les mises en perspective.

Ce type de transformation n'est généralement pas inversible. Elle ne conserve pas les barycentres. On notera qu'une transformation affine est un cas particulier de transformation projective pour laquelle $C = 0$.

⁷ On entend par là : si $g = \sum_j \alpha_j P_j$ est le barycentre d'un ensemble de points P_j , si $P'_j = A \cdot P_j + B$, alors $\sum_j \alpha_j P'_j = A \cdot g + B$. En clair, le barycentre d'un ensemble de points transformé est le barycentre transformé.

2.1.3 Utilisation des transformations

Lors des différentes étapes du pipeline graphique, les principales utilisations des classes de transformations sont les suivantes :

cadre	transformation
Modélisation : – construction d'un objet à partir d'objets géométriques élémentaires. – mise à l'échelle d'un objet dans le repère global.	similitude ou affine générale
Placement ou déplacement d'un objet dans le repère global.	rigide
Passage dans le repère de l'observateur ou de la caméra.	rigide
Mise en perspective	projective
Projection dans le plan de l'écran.	projective

2.2 Composition de transformations

La composition de transformations affines et projectives soulève un problème pratique important : son expression est **peu pratique à manipuler**. Plus le nombre de transformations augmente, plus l'expression de la transformation complète en fonction du point initial se complique. Or il n'est pas rare qu'un point d'un objet géométrique ait à subir six à huit transformations élémentaires avant d'être affiché. Comme la transformation sera la même pour tous les points de l'objet considéré, il est préférable de connaître (donc de calculer) l'expression de la transformation totale. Nous voyons maintenant comment cette difficulté peut être surmontée par l'utilisation des coordonnées homogènes.

2.2.1 Coordonnées homogènes

Passer en coordonnées homogènes consiste à ajouter une coordonnée supplémentaire (souvent notée w , et dont la valeur initiale est 1) aux 3 coordonnées déjà existantes (x, y, z) . L'espace obtenu est un espace de dimension 4, et est souvent appelé **espace projectif**. Nous explicitons ce principe sur les deux principales classes de transformations :

transformation affine

Les transformations affines utilisent une version simplifiée des coordonnées ho-

homogènes pour laquelle w est toujours égal à 1. La transformation affine $P' = A_1.P + B_1$ permettant de transformer un point P en un point P' s'écrit :

$$\begin{bmatrix} P' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix}$$

En effectuant bloc à bloc le calcul matriciel,

$$\begin{bmatrix} P' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1.P + B_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On obtient bien $P' = A_1.P + B_1$.

transformation projective

Pour la forme générale des coordonnées homogènes, la coordonnée w n'est plus égale à 1. La transformation projective $P' = (A.P + B)/(C.P + 1)$ s'écrit :

$$\begin{bmatrix} w'.P' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ w \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} P \\ w \end{bmatrix}$$

où la valeur de w est :

- égale à 1 ($w = 1$) si le point P provient de l'espace \mathbb{R}^3 (on plonge P dans l'espace projectif).
- égale à la valeur de sa coordonnée homogène w calculée s'il est issu d'une ou plusieurs transformations après passage dans l'espace projectif.

En effectuant bloc à bloc le calcul matriciel, on obtient :

$$\begin{bmatrix} w'.P' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A.P + w.B \\ C.P + w \end{bmatrix}$$

Pour trouver les coordonnées du point transformé P' dans \mathbb{R}^3 , on "simplifie"⁸ par w' :

$$P' = \frac{w'.P'}{w'} = \frac{A.P + w.B}{C.P + w}$$

Comme P est un point originaire de \mathbb{R}^3 , $w = 1$ et on retrouve bien la transformation projective recherchée.

Pour résumer, pour calculer la transformation d'un point P dans l'espace projectif :

1. on plonge le point P dans l'espace projectif en lui ajoutant une 4^{ème} coordonnée w égale à 1.

⁸On se reprojette dans l'hyperplan $w = 1$. Le point obtenu dans \mathbb{R}^3 , en supprimant la coordonnée homogène désormais égale à 1, est le résultat de la transformation.

2. on effectue le produit de la matrice M correspondant à la transformation ou à la composition de transformations par les coordonnées de ce point (désormais en coordonnées homogènes).
3. Enfin, les coordonnées du point transformé P' s'obtiennent par projection dans l'hyperplan $w = 1$.

2.2.2 Composition de transformations en coordonnées homogènes

L'espace projectif permet de réduire la complexité d'une composition de transformations affines ou projectives. En effet, notons :

$$M_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & 1 \end{bmatrix}$$

la matrice associée à la transformation projective $P' = (A_i \cdot P + B_i) / (C_i \cdot P + 1)$ (affine si $C_i = 0$). Alors, la transformation d'un point P de \mathbb{R}^3 en un point P' par les n transformations M_1, M_2, \dots, M_n successives s'écrit :

$$\begin{bmatrix} w' \cdot P' \\ w' \end{bmatrix} = M_n \dots M_2 \cdot M_1 \cdot \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le calcul de la transformation complète M se réduit donc à un simple produit matriciel. Les coordonnées de P' n'étant obtenues qu'après renormalisation de $w' \cdot P'$ par w' (= projection de $w' \cdot P'$ dans l'hyperplan $w = 1$).

Nous concluons cette partie par un ensemble de remarques :

- si l'on veut effectuer des transformations dans l'ordre $\{M_1, M_2, M_3\}$ (de gauche à droite), alors la matrice de transformation complète M se construit, elle, de droite à gauche :

$$\begin{bmatrix} w' \cdot P' \\ w' \end{bmatrix} = \left(M_3 \cdot \left(M_2 \cdot \left(M_1 \cdot \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right) \right) = M_3 \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix}$$

d'où $M = M_3 \cdot M_2 \cdot M_1$.

- Les compositions de transformations ne sont **pas commutatives**, à quelques rares exceptions près (par exemple, une composition au sein du groupe des translations ; mais contrairement à une idée reçue, le groupe des rotations **n'est pas** commutatif.). Il est donc important de respecter l'ordre des transformations.
- Une transformation est inversible si et seulement si sa matrice M de transformation associée est inversible. Dans ce cas, la transformation inverse est M^{-1} (on

pouvait s'en douter ...). Cette transformation inverse peut se décomposer trivialement en :

$$M = M_3.M_2.M_1 \Leftrightarrow M^{-1} = M_1^{-1}.M_2^{-1}.M_3^{-1} \quad (1.5)$$

(transformations inverses appliquées en sens inverse) car alors $M^{-1}.M = I$. Ceci a deux conséquences :

- Pour qu'une composition de transformation soit inversible, il faut que chaque transformation dont elle est issue soit inversible (*i.e.* $M = \prod_i M_i$ inversible si et seulement si M_i est inversible pour tout i).
- Si une composition transformations n'est composée que de quelques transformations facilement inversibles (toutes les transformations Euclidiennes), il peut être plus rapide de construire la matrice inverse "à la main" plutôt que d'inverser la matrice de transformation complète. Des exemples sont présentés section 2.3.
- On notera à propos des transformations affines que certains auteurs utilisent la coordonnée homogène comme facteur d'échelle. En prenant par exemple $w = 2$, la projection réduit la taille de l'objet par 2. Nous ne recommandons pas cette approche en lui préférant une véritable transformation d'échelle (similitude).
- D'un point de vue algorithmique :
 - L'utilisation des coordonnées homogènes **ne réduit pas** le nombre d'opérations effectuées lors du calcul d'une transformation (au contraire !). Mais, elle apporte une approche unifiée pour l'ensemble des transformations et permet une manipulation plus aisée des compositions de transformations.
 - Dans le cas où l'on ne souhaite pas implémenter plus qu'un très petit nombre de transformation projective et n'utiliser que des transformations affines, on peut se priver de calculer la dernière ligne de la matrice (celle dont le résultat fait toujours $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$ puisqu'il s'agit d'une transformation affine) et de projeter (et donc de diviser par 1). Les transformations projectives devront alors être codées à la main une à une ou il faudra utiliser des fonctions spécifiques effectuant le calcul de la dernière ligne et de la renormalisation.
 - Lorsqu'une composition de transformation est utilisée plus d'une fois, ne pas hésiter à calculer et à stocker la matrice de transformation complète.

2.3 Transformations affines élémentaires

On s'intéresse maintenant à l'expression mathématique et aux propriétés des transformations affines $P' = A.P + B$ les plus classiques. Pour la transformation inverse associée, on notera $P = A'.P' + B'$; on rappelle que $A' = A^{-1}$ et $B' = -A^{-1}.B$ (évident

mais voir la section 2.1.1). Comme dans la section précédente, on note M la matrice de la transformation affine en coordonnées homogènes.

On remarquera que la majorité des transformations inverses est élémentaire, et qu'elles ne nécessitent donc pas l'inversion numérique effective de la matrice par une méthode directe.

2.3.1 Identité

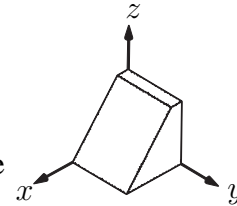
type : transformation rigide.

propriétés : c'est la transformation qui ne change rien.

matrice : $A = I_3$ et $B = 0$ où I_3 est la matrice identité⁹ de taille 3×3 .

coordonnées homogènes : $M = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$

inverse : $A' = I_3$, $B' = 0$ et $M^{-1} = I_4$.



Pour comparer les effets des différentes transformations, on prendra cette figure comme référence.

2.3.2 Translation

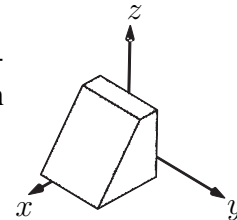
type : transformation rigide.

propriétés : conserve les normales.

matrice : $A = I_3$ et B est le vecteur de translation. En coordonnées homogènes, la matrice de transformation

est : $M = \begin{bmatrix} I_3 & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

inverse : $A' = I_3$, $B' = -B$ et $M^{-1} = \begin{bmatrix} I_3 & -B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.



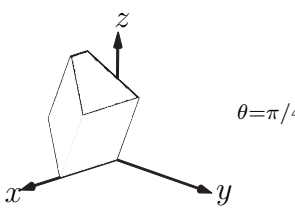
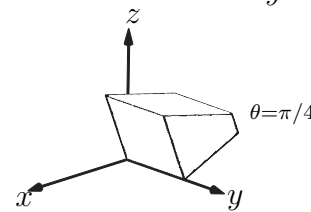
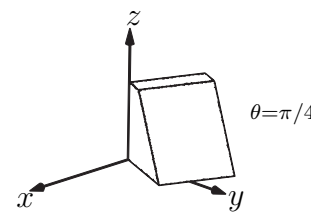
2.3.3 Rotation autour d'un axe passant par O

type : transformation rigide.

propriétés : Les points de l'axe de rotation sont invariants. Le point transformé P' se trouve toujours dans le plan normal à l'axe et passant par le point initial P (justifié par ligne de la matrice identité sur la coordonnée de l'axe).

⁹Son écriture est $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

matrice : A est la matrice de rotation, B = 0. Nous donnons les 3 matrices de rotation de base. Le cas quelconque est traité dans la section 2.4.

<p>rotation d'axe Ox</p>  <p style="text-align: right;">$\theta = \pi/4$</p>	<p>rotation d'axe Oy</p>  <p style="text-align: right;">$\theta = \pi/4$</p>	<p>rotation d'axe Oz</p>  <p style="text-align: right;">$\theta = \pi/4$</p>
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

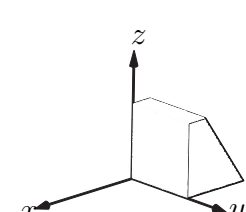
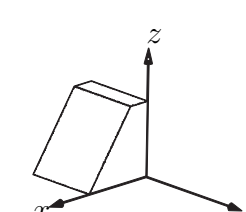
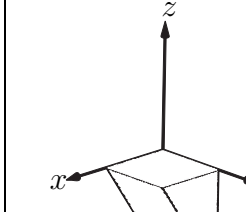
inverse : $A' = A^T$ (car la matrice est orthogonale), $B' = 0$ et $M^{-1} = \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.3.4 Symétrie par rapport à un plan passant par O

type : transformation rigide.

propriétés : Les points sur le plan de symétrie sont invariants. Le point transformé P' se trouve toujours dans le plan orthogonal au plan de symétrie et passant par le point initial P . La transformation est réflexive : $A.A^{-1} = I$ (appliquer la transformation sur un point deux fois revient sur le point d'origine).

matrice : A est la matrice de la similitude, B = 0. Nous donnons les 3 symétries de base. Le cas quelconque est traité dans la section 2.4.

<p>symétrie de plan Oyz</p> 	<p>symétrie de plan Oxz</p> 	<p>symétrie de plan Oxy</p> 
$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

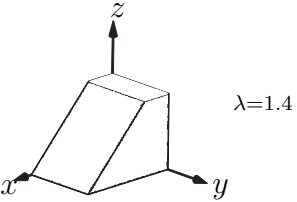
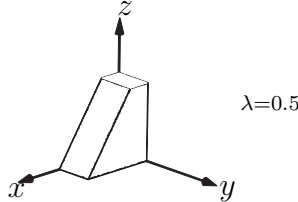
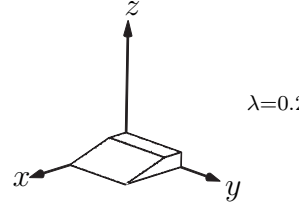
inverse : $A' = A$ (par réflexivité), $B' = 0$ et $M^{-1} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.3.5 Changement d'échelle

type : similitude

propriétés : mêmes propriétés que la symétrie par rapport à un plan **mais** cette transformation n'est pas rigide.

matrice : $A(\lambda)$ (avec $\lambda \geq 0$) est la matrice de changement d'échelle, $B = 0$. Nous donnons les 3 matrices de changement d'échelle de base :

<p>zoom selon l'axe Oy</p>  <p style="text-align: right;">$\lambda=1.4$</p> $A_x(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	<p>zoom selon l'axe Ox</p>  <p style="text-align: right;">$\lambda=0.5$</p> $A_y(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	<p>zoom selon l'axe Oz</p>  <p style="text-align: right;">$\lambda=0.2$</p> $A_z(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$
---	--	---

inverse : L'inverse d'une matrice diagonale est la matrice diagonale avec ses coefficients diagonaux inversés. Donc, $A'(\lambda) = A(\frac{1}{\lambda})$, $B' = 0$, et $M^{-1} = \begin{bmatrix} A(\frac{1}{\lambda}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

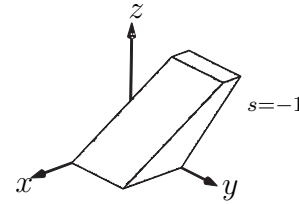
remarque :

- Soit $A_{xyz}(\lambda) = A_x(\lambda) \cdot A_y(\lambda) \cdot A_z(\lambda)$, alors cette transformation est un zoom (ou anamorphose) de facteur λ . A noter que cette composition de transformation est commutative (par commutativité de la multiplication sur la diagonale).
- Pour $\lambda = -1$, on retrouve les matrices de symétrie par rapport à un plan. Une pratique courante consiste alors à ne définir qu'une seule transformation pour le changement d'échelle et pour la symétrie en autorisant les valeurs de λ à être négative. Quand $\lambda > 0$ est positif, il s'agit d'un changement d'échelle. Quand $\lambda < 0$, il s'agit de la composition d'un changement d'échelle et d'une symétrie (ou inversement, puisque cette composition est commutative).

2.3.6 Cisaillement (ou shearing)

type : transformation affine.

propriétés : Cette transformation perturbe linéairement une des coordonnées en fonction d'une autre. Dans l'exemple de la figure, la coordonnée x est décalée vers la droite d'un facteur proportionnel à l'altitude z . Cette transformation engendre une véritable déformation de l'objet.



matrice : $B = 0$. Basiquement, la matrice A d'un cisaillement se construit en partant de la matrice identité I_3 et en remplaçant l'un des 0 par un coefficient s . Par

exemple, l'exemple ci-dessus correspond à la matrice : $A(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

inverse : on montre facilement que $A'(s) = A(-s)$. $B' = -B$ et $M^{-1} = \begin{bmatrix} A(-s) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

remarque : on peut montrer qu'une rotation peut s'écrire comme une composition de cisaillement. Cette propriété est notamment utilisée en 2D pour effectuer des rotations rapides (voir annexe).

2.4 Transformations et compositions classiques

2.4.1 Changement de repère

Nous avons vu équation 1.4 que le changement de repère d'un point A s'écrivait : $A = M.(a - O')$ où a représente les coordonnées de A dans l'ancien repère, A ses coordonnées dans le nouveau repère, M la matrice du changement de repère, et O' les coordonnées du centre du nouveau repère dans l'ancien repère. Un changement de repère s'écrit donc en coordonnées homogènes comme :

$$T = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_3 & -O' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & -M.O' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Son inverse s'obtient facilement en utilisant l'équation 1.5 ou en inversant l'équation 1.4 :

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} I_3 & O' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^T & O' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

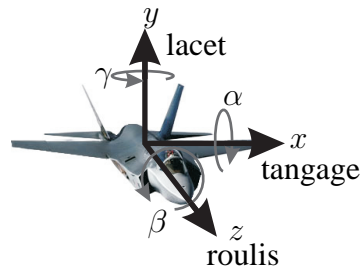


FIG. 1.1 – Angles d’Euler et leurs significations.

2.4.2 Transformation d’Euler et Gimbal Lock

La transformation d’Euler est communément utilisée pour orienter un objet dans l’espace ou gérer ses mouvement dans son repère local. Elle est définie comme la composition des 3 rotations de base dans cet ordre précis :

$$T(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\gamma).R_x(\beta).R_y(\alpha)$$

où $R_z(\gamma)$ représente la rotation d’axe z et d’angle γ (notations similaires pour $R_x(\beta)$ et $R_y(\alpha)$). On appelle (α, β, γ) les angles d’Euler.

Chacune de ces rotations a un nom précis¹⁰ (voir figure 1.1), mais les noms les plus couramment utilisés pour les désigner sont¹¹ le lacet pour R_y (en anglais, **Yaw**), le tangage pour R_x (**Pitch**), le roulis pour R_z (**Roll**)

L’inconvénient de la transformation d’Euler (et des compositions de rotation en général) est que dans certains cas, on perd un degré de liberté. Par exemple, si $\beta = \pi/2$, la matrice de transformation $T(\alpha, \pi/2, \gamma)$ devient :

$$T(\alpha, \pi/2, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \gamma) & \sin(\alpha + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha + \gamma) & \cos(\alpha + \gamma) & 0 \end{bmatrix}$$

Cette transformation ne dépend plus que d’une seule variable ($\lambda = \alpha + \gamma$). Autrement dit, on perd un degré de liberté sur la transformation (chaque variable est sensée apporter un degré de liberté, donc 3 en tout).

Ceci a une conséquence dramatique : lors de la composition successive de transformations, on perd le contrôle de la transformation, et l’objet transformé semble effectuer des sauts. Ce phénomène est connu sous le nom de “Gimbal Lock”.

Le “Gimbal Lock” est un problème de représentation : il ne faut pas décomposer une rotation sous forme d’angle d’Euler un rotation quelconque car la rotation R_y

¹⁰Précession, nutation et rotation propre.

¹¹ce sont en fait les angles de Cardan.

change la direction des axes x et z ; et la rotation R_x change la direction de l'axe z . Ainsi, chaque rotation lors de la composition d'Euler dépend des rotations précédentes.

La seule solution pour représenter simplement des rotations d'axe quelconque et de composer sans problème¹² un nombre quelconque de rotation est l'utilisation des quaternions.

2.4.3 Introduction aux quaternions

L'utilisation des quaternions est une méthode efficace (en terme de complexité et de validité des résultats) pour composer ou effectuer des rotations quelconques.

Qu'est-ce qu'un quaternion ?

Un quaternion est un couple $[s, \mathbf{v}]$ constitué d'un scalaire $s \in \mathbb{R}$ et d'un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Interprétation d'un quaternion :

- le quaternion $q_v = [0, \mathbf{v}]$ représente le vecteur \mathbf{v} .
- le quaternion $q_R = [\cos(\theta/2), \mathbf{a} \cdot \sin(\theta/2)]$ représente la rotation vectorielle d'angle θ et d'axe \mathbf{a} (vecteur unitaire).

Opérations élémentaires sur les quaternions :

Les opérations de base sur les quaternions sont les suivantes :

conjugaison	$q^* = [s, -\mathbf{v}]$
norme	$ q = q \cdot q^* = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + s^2$
inverse	$q^{-1} = q^* / q $
addition	$q_1 + q_2 = [s_1 + s_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2]$
multiplication	$q_1 \cdot q_2 = [s_1 \cdot s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 + s_1 \cdot \mathbf{v}_2 + s_2 \cdot \mathbf{v}_1]$

Composition et transformation

- **Composition de deux rotations** : si q_{R_1} et q_{R_2} représentent respectivement les rotations R_1 et R_2 , alors le quaternion :

$$q = q_{R_2} \cdot q_{R_1}$$

représente la composition de ces deux rotations (R_1 puis R_2).

Le quaternion $q = [s, \mathbf{v}]$ résultat s'interprète comme :

¹²**Remarque** : l'écriture de $R_z(\gamma) \cdot R_x(\beta) \cdot R_y(\alpha)$ avec des quaternions produira aussi un "Gimbal Lock" car l'écriture d'une rotation quelconque avec des angles d'Euler n'est pas une écriture saine pour les raisons déjà exposées.

- si $|s| = 1$, alors la transformation résultante est l'identité.
- si $|s| < 1$, alors la transformation résultante est la rotation d'angle $\theta = 2 \cdot \arccos(s)$ et d'axe $\mathbf{a} = \mathbf{v} / \sqrt{1 - s^2}$.
- **Rotation d'un vecteur \mathbf{V}** : si q_R est la quaternion représentant la rotation R , alors la transformation du vecteur \mathbf{v} ($q_{\mathbf{v}} = [0, \mathbf{v}]$) par la rotation R est obtenue avec :

$$q_{\mathbf{v}'} = q_R \cdot q_{\mathbf{v}} \cdot q_R^*$$

A noter que ce quaternion a nécessairement sa partie scalaire nulle ($q_{\mathbf{v}'} = [0, \mathbf{v}']$). L'utilisation de cette méthode pour transformer des points est immédiate : on remplace directement le vecteur à transformer par le point à transformer. Toutes les rotations ont alors nécessairement leurs axes qui passent par l'origine.

- **Changement d'orientation** : on souhaite maintenant trouver la rotation qui transforme le vecteur \mathbf{u} en vecteur \mathbf{v} (tous deux normalisés). On applique alors la méthode suivante :

1. **calcul de l'axe de rotation** : $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.
2. **calcul de l'angle de rotation** : $\cos(2\theta) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ et $\sin(2\theta) = |\mathbf{w}|$ (à noter qu'il n'y a pas de problème de signe pour le sinus car le repère $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est direct par construction). Dans le cas où $|\mathbf{w}|$ est proche de 0 ($\theta \simeq k \cdot \pi$), on a tout intérêt à changer l'axe de rotation et choisir le vecteur \mathbf{w} orthogonal à \mathbf{u} pour éviter les instabilités numériques.
3. **calcul des demi-angles** : avec (l'inversion) des formules classiques : $\sin \theta = \sqrt{(1 - \cos(2\theta))/2}$ et $\cos \theta = \sqrt{(1 + \cos(2\theta))/2}$.
4. **on obtient le quaternion** (normalisé) q qui représente cette transformation avec $q = [\cos(\theta), \sin(\theta) \cdot \mathbf{w} / |\mathbf{w}|]$.

Cette méthode est typiquement utilisée pour changer l'orientation d'un objet. On notera qu'il faut utiliser au minimum deux vecteurs pour définir complètement le repère (même problématique que l'orientation d'un repère, voir section 3.1.1).

Interpolation sphérique linéaire Si p et q sont deux quaternions représentant deux points (notés \mathbf{v}_p et \mathbf{v}_q) à la surface d'une sphère (*i.e.* des quaternions de norme 1), l'interpolation linéaire sphérique consiste à passer du premier point au second en prenant le chemin (donc l'arc de cercle) le plus court sur la sphère joignant ces deux points. Le quaternion interpolé s'écrit :

$$s(p, q, t) = \frac{1}{\sin \phi} (p \cdot \sin((1 - t) \cdot \phi) + q \cdot \sin(t \cdot \phi))$$

où t varie dans $[0; 1]$ et ϕ est l'angle aigu entre p et q (ce qui implique que $\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_q = \cos \phi > 0$). Avec cette construction, on passe de $s(p, q, 0) = p$ à $s(p, q, 1) = q$ avec une vitesse constante.

Cette transformation est aussi connue sous le doux nom de SLERP (sphérical linear interpolation).

Construction de la matrice de rotation associée à un quaternion

On peut montrer que la matrice de la rotation R représentée par le quaternion $q = [s, \mathbf{v}]$ où $\mathbf{v} = [x, y, z]$ s'écrit :

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2sz & 2xz + 2sy \\ 2xy + 2sz & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz - 2sx \\ 2xz - 2sy & 2yz + 2sx & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{bmatrix}$$

On peut ainsi calculer la composition des transformations avec les quaternions, et appliquer les transformations des points et des vecteurs dans l'espace affine (ou homogène).

Construction du quaternion associée à une matrice de rotation

Soit une matrice M_R de rotation d'axe quelconque (ou la composition d'un nombre quelconque de rotations) :

$$M_R = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$

Le quaternion q associé (avec les mêmes notations que dans la partie précédente) dépend de la trace de la matrice :

$$T = r_{00} + r_{11} + r_{22}$$

La valeur du quaternion est dépend alors du signe de la trace, et de la valeur du maximum de la diagonale si la trace est négative :

	$T > 0$	$T \leq 0$ $r_{00} = \max\{r_{00}, r_{11}, r_{22}\}$	$T \leq 0$ $r_{11} = \max\{r_{00}, r_{11}, r_{22}\}$	$T \leq 0$ $r_{22} = \max\{r_{00}, r_{11}, r_{22}\}$
s	$(\sqrt{T+1})/2$	$(r_{12} - r_{21})/(4x)$	$(r_{20} - r_{02})/(4y)$	$(r_{01} - r_{10})/(4z)$
x	$(r_{21} - r_{12})/(4s)$	$(\sqrt{r_{00} - r_{11} - r_{22} + 1})/2$	$(r_{01} + r_{10})/(4y)$	$(r_{02} + r_{20})/(4z)$
y	$(r_{02} - r_{20})/(4s)$	$(r_{01} + r_{10})/(4x)$	$(\sqrt{r_{11} - r_{00} - r_{22} + 1})/2$	$(r_{12} + r_{21})/(4z)$
z	$(r_{10} - r_{01})/(4s)$	$(r_{02} + r_{20})/(4x)$	$(r_{12} + r_{21})/(4y)$	$(\sqrt{r_{22} - r_{00} - r_{11} + 1})/2$

2.4.4 Généralisation des transformations

On peut généraliser facilement certaines transformations données ci-dessus. Pour les rotations, il s'agit du cas des rotations d'axe quelconque. Pour les symétries ou les changements d'échelle, il s'agit du cas utilisant un plan de symétrie quelconque.

Le principe est toujours le même. Nous l'explicitons dans le cas de la rotation. On calcule le changement de repère T (transformation rigide) qui transforme l'axe de rotation souhaité en l'axe Oz . Puis, on applique la rotation $R_z(\alpha)$ d'axe Oz et d'angle α souhaité. Enfin, on applique la transformation M^{-1} pour se retrouver dans le repère initial. La matrice de rotation d'axe quelconque est la composition de ces trois transformations : $T^{-1} \cdot R_z(\alpha) \cdot T$.

L'axe de rotation est défini par un de ses points C et sa direction, le vecteur unitaire V . Le calcul du changement de repère M à partir de l'axe souhaité s'effectue en deux étapes :

- On prend arbitrairement le point C comme centre du repère.
- On exprime le vecteur V en coordonnées sphériques¹³ (θ, ϕ) ($R = 1$ puisque le vecteur est unitaire). Par définition des coordonnées sphériques, le vecteur V s'obtient trivialement à partir du vecteur $e_z = [0 \ 0 \ 1]$ comme :

$$V = R_z(\theta) \cdot R_y(\phi) \cdot e_z$$

où R_y et R_z sont respectivement les rotations d'axe Oy et Oz . La transformation vectorielle qui nous intéresse est donc la transformation inverse de celle-ci, à savoir $(R_z(\theta) \cdot R_y(\phi))^T = R_y^T(\phi) \cdot R_z^T(\theta)$

Par conséquent la matrice de changement de repère est :

$$T = \begin{bmatrix} R_y^T(\phi) \cdot R_z^T(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_3 & -C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_y^T(\phi) \cdot R_z^T(\theta) & -R_y^T(\phi) \cdot R_z^T(\theta) \cdot C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et son inverse :

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R_z(\theta) \cdot R_y(\phi) & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour un plan de symétrie quelconque, on travaille avec l'axe normal au plan, et on utilise la même méthode.

3 Modèle géométrique de l'appareil photographique

Dans cette section, on s'intéresse à la compréhension du fonctionnement complet de l'appareil photographique, et aux modèles mathématiques qui y sont associés. Nous

¹³ ϕ est l'angle à la verticale, et θ l'angle à l'axe Ox . Vérifier que cette convention est bien la même que celle prise dans le rappel des coordonnées sphériques.

y abordons :

- La définition et la construction des différents repères utilisés (local, global, de l’observateur).
- Le problème de la mise en perspective en utilisant une caméra élémentaire de type “trou d’aiguille”.
- La définition de la plaque photographique afin d’obtenir l’image de synthèse recherchée.
- La géométrie des lentilles minces pour simuler le phénomène de profondeur de champ.
- La simulation des vitesses d’obturation de l’appareil photographique pour obtenir le flou de mouvement.

On peut ainsi de simuler de façon réaliste l’ensemble des comportements d’un appareil photographique, d’une caméra, ou du système de vision humain.

Notons dès à présent que le sens des paramètres et la méthode de construction du repère de l’observateur constituent un choix, et ne sont en rien un standard à respecter¹⁴.

3.1 Repères et observation

3.1.1 Choix et définition des repères

On suppose que nous disposons de l’ensemble d’objets géométriques que l’on souhaite voir dans la scène synthétique.

Un ensemble de repères différents sont généralement définis :

- le **repère global** (unique) qui est un repère fixe dans lequel l’ensemble des objets sont placés (ou évolues). Le choix de ce repère est arbitraire.
- les **repères locaux** (un par objet). Le repère local est celui dans lequel l’objet est initialement défini. On appelle transformation globale (world transform) la transformation qui amène l’objet du repère local de l’objet au repère global. Cette transformation n’est en général pas orthogonale (changement d’échelle + rotation + translation).
- le **repère de l’observateur** (un par caméra) est le repère associé à l’observateur (centré à la position de la pupille de l’observateur, l’axe z représente la profondeur, l’axe y représente la direction du haut). On appelle transformation d’observation (view transform) la transformation qui permet de passer du repère de global au repère de l’observateur. Cette transformation est généralement orthogonale.

¹⁴Elle est similaire à celle utilisée sur le logiciel *RenderMan* de *Pixar*



L'ensemble de ces étapes constitue une mise en situation géométrique. Notons que le repère utile pour le rendu dépend de la méthode utilisée (z -buffer : repère de l'observateur, lancé de rayon : repère global, ...).

3.1.2 Repère de l'observateur et transformation d'observation

Construction du repère de l'observateur On effectue cette construction dans le repère global. Les caractéristiques géométriques de l'observateur sont définies par :

- le point Ω où il est placé.
- la direction \mathbf{U} dans laquelle il regarde (direction du regard).
- la direction \mathbf{V} du haut pour l'observateur (vecteur allant de ses pieds vers sa tête), orthogonal à \mathbf{U} .

L'ensemble de ses paramètres sont nécessaires et définissent de manière unique le repère de l'observateur.

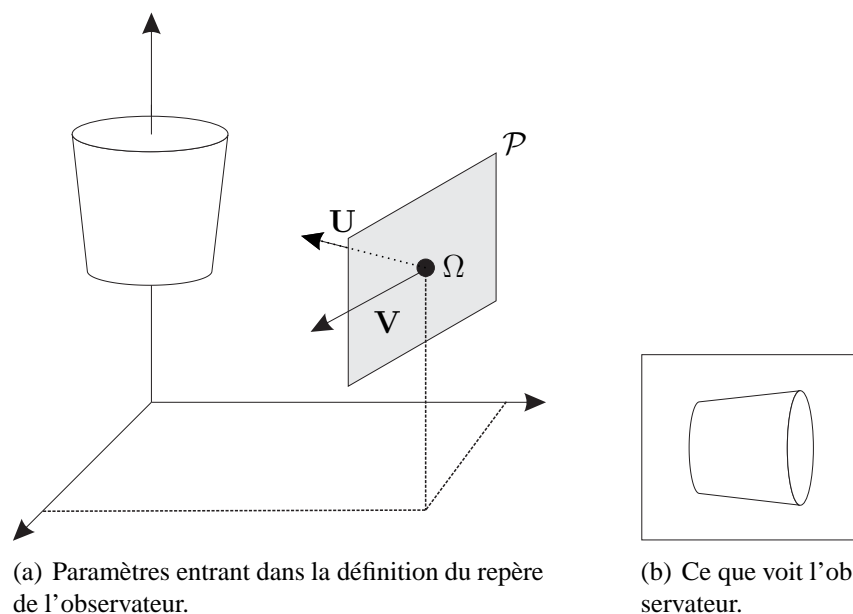


FIG. 1.2 – Repère de l'observateur.

Il est alors facile de construire un repère caractéristique de l'observateur à partir de ces informations. On utilise le produit vectoriel de façon à ce que le repère obtenu soit

direct :

$$\mathbf{W} = \mathbf{V} \wedge \mathbf{U} \quad (1.6)$$

L'origine du repère est placé en Ω . Une base de vecteurs adéquate pour le repère est $(\mathbf{W}, \mathbf{V}, \mathbf{U})$, car \mathbf{U} doit correspondre à l'axe des z (la profondeur), \mathbf{V} doit correspondre à l'axe des y (la verticale de l'écran) et \mathbf{W} l'axe des x (celui qui reste : l'axe horizontal de l'écran).

En passant les objets géométriques du repère global dans le repère de l'observateur, on obtient la position et l'orientation de tous les objets relativement à l'observateur.

Paramètres pratiques de définition de l'observateur Afin de simplifier la mise en place de l'observateur et régler les paramètres géométriques, on utilise plutôt des réglages analogues à ceux d'un appareil photographique. Les réglages possibles sont les suivants :

- la position de l'observateur (point Ω)
- l'axe de l'objectif (vecteur \mathbf{U})
- la direction approximative du haut. C'est un vecteur \mathbf{V}' orienté vers le haut mais pas nécessairement orthogonal à \mathbf{U} . Par exemple, s'il est facile de donner la direction du plafond, il est plus difficile de donner la direction exacte orthogonale au plan du plafond.

Pour obtenir la base complète, on doit donc calculer les vecteurs \mathbf{V} et \mathbf{W} à partir de ces données.

Si \mathbf{U} et \mathbf{V}' sont deux vecteurs unitaires, alors $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}' = \cos \widehat{\mathbf{U}, \mathbf{V}'}$ comme représenté sur la figure 1.3. On remarquera aussi que les deux vecteurs \mathbf{U} et \mathbf{V}' définissent un plan dans lequel le vecteur \mathbf{V} recherché se trouve aussi. Alors le vecteur suivant :

$$\mathbf{V}' - (\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}') \cdot \mathbf{U}$$

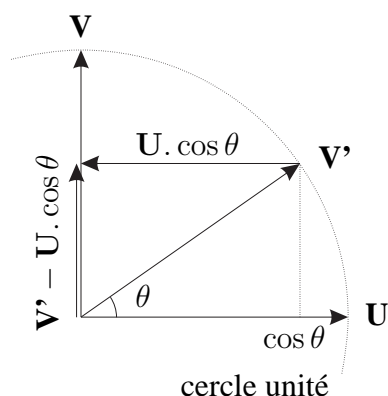
n'est autre (**après renormalisation**) que le vecteur recherché \mathbf{V} .

Pour le calcul de la direction de l'axe horizontal \mathbf{W} , connaissant maintenant \mathbf{V} , on utilise directement l'équation 1.6 page 33. Le repère de l'observateur $(\Omega, (\mathbf{W}, \mathbf{V}, \mathbf{U}))$ est donc complètement déterminé.

3.2 Mise en perspective et projection

L'observateur est désormais placé et nous lui avons associé le repère $(\Omega, (\mathbf{W}, \mathbf{V}, \mathbf{U}))$; mais que voit-il ?

Une première approche consiste à se dire : soit le plan défini par le point Ω et le vecteur normal \mathbf{U} . Ce plan (du moins une partie de celui-ci située autour de Ω) peut être

FIG. 1.3 – Méthode de construction de V à partir de V'

considéré comme la rétine de l'observateur. Ce que l'observateur voit est la projection dans ce plan de tous les objets situés devant l'observateur.

Le vecteur normal U représente la direction de l'axe de "profondeur" pour l'observateur. Plus on se déplace dans cette direction, plus on s'éloigne de l'observateur. Il peut alors être tentant de considérer la projection (parallèle) consistant à supprimer la coordonnée associée à U , pour ne garder que les deux autres (celles associées à V et W). L'exemple (a) de la figure 1.4 montre que cette projection produit des résultats en désaccord avec la réalité :

- Deux objets de même taille, l'un proche ou l'autre lointain, ont une projection parallèle de même taille.
- Deux droites partant à l'infini restent parallèles.

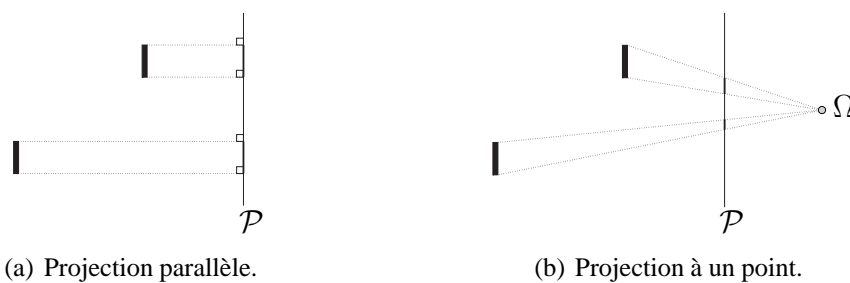


FIG. 1.4 – Deux différents types de projection considérés ici.

Le problème peut se résumer ainsi : il n'y a pas de déformation des objets en fonction de leurs distances à l'observateur. Nous allons donc considérer un autre type de

projection (la projection à un point) qui permet d'obtenir une projection plus conforme à ce qu'observe l'œil humain.

Projection à un point

Le principe d'une projection à un point est simple. Elle est définie à partir d'un point Ω appelé **centre de projection** (que nous identifierons comme la position de l'observateur) et d'un plan de projection \mathcal{P} (qui pour nous sera notre écran dans lequel nous souhaitons projeter notre scène). La projection d'un point P est obtenue en prenant l'intersection de la demi-droite partant de Ω vers P avec le plan \mathcal{P} (voir figure 1.4). On obtient alors un comportement similaire à l'œil humain : les objets lointains deviennent petits, les lignes parallèles s'intersectent à l'infini (lignes de fuites).

Les équations de la transformation géométrique associée s'obtiennent facilement à partir de la figure géométrique 1.5. On considère la projection à un point définie par le point Ω et le plan de projection \mathcal{P} . On nomme Q le projeté du point P sur le plan \mathcal{P} . Ces points sont respectivement de coordonnées (x_q, y_q, z_q) et (x_p, y_p, z_p) .

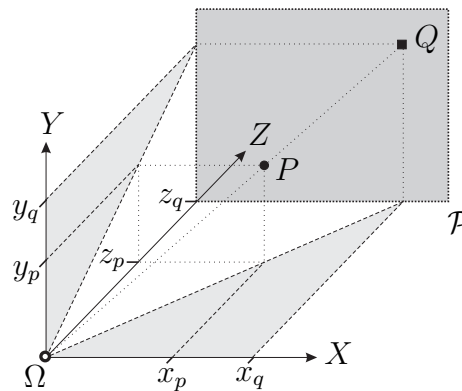


FIG. 1.5 – Géométrie associée à la projection à un point.

Afin de simplifier le problème, on suppose que l'équation du plan de projection est $z = d$ (comme c'est le cas ici, z représente l'axe de profondeur de la scène -dont la direction est U_z - ; on projette sur un plan orthogonal à celui-ci). On connaît les points Ω (l'origine du repère et le centre de projection), \mathcal{P} (le plan de projection), P (le point à projeter). On cherche les coordonnées du point Q .

On déduit de la figure les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_q}{z_q} = \frac{x_p}{z_p} \quad (\text{voir le triangle grisé dans le plan } Oxz) \\ \frac{y_q}{z_q} = \frac{y_p}{z_p} \quad (\text{voir le triangle grisé dans le plan } Oyz) \\ z_q = d \quad (\text{par définition, projection sur le plan } \mathcal{P}) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_q = d \cdot \frac{x_p}{z_p} \\ y_q = d \cdot \frac{y_p}{z_p} \\ z_q = d \end{array} \right.$$

Cette transformation s'exprime simplement à l'aide du paramètre d qui est la distance orthogonale entre le centre de projection et le plan de projection. La projection d'un point P s'écrit donc :

$$[x_q \quad y_q \quad z_q] = \frac{d}{z_p} \cdot [x_p \quad y_p \quad z_p] \quad (1.7)$$

Les coordonnées de P sur le plan de projection $z = d$ (la rétine de l'observateur) sont donc (x_q, y_q)

Nous dérivons maintenant quelques propriétés géométriques liées aux projections à un point. Considérons les droites $D_{\alpha,\beta}$ de la forme $\{x = \alpha.z, y = \beta.z\}$.

- L'intersection de toutes ces droites est le centre de projection Ω .
- L'intersection de la droite $D_{\alpha,\beta}$ et du plan \mathcal{P} est le point $(\alpha d, \beta d, d)$. De plus, la projection de tout point de la droite $D_{\alpha,\beta}$ est le point $(\alpha d, \beta d, d)$.
- La projection du plan $x = \alpha.z$ (resp $y = \beta.z$) est la droite $\{x = \alpha d, z = d\}$ (resp. $\{y = \beta d, z = d\}$). Cette droite est l'intersection du plan avec le plan de projection \mathcal{P} .

L'ensemble des droites $D_{\alpha,\beta}$ sont appelées les droites de projection. Si on considère les 4 plans d'équation $x = \alpha_0.z$, $x = -\alpha_0.z$, $y = \beta_0.z$ et $y = -\beta_0.z$, alors toutes les droites $D_{\alpha,\beta}$ telles que $-\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ et $-\beta_0 \leq \beta \leq \beta_0$ sont encadrées par ces 4 plans. En conséquence, tout point encadré par ces plans se projette dans le carré (x, y, d) avec $x \in [-\alpha_0.d, \alpha_0.d]$ et $y \in [-\beta_0.d, \beta_0.d]$.

Expression de la transformation en coordonnées homogènes

Ecrire telle quelle, la projection à un point ne peut clairement pas s'écrire sous la forme $P' = (A.P + B)/(C.P + 1)$. Le simple changement du centre du repère suivant permet cette écriture :

$$z = z' - d$$

ce qui revient à aligner le plan de projection arrière $z = -d$ avec le plan $z = 0$.

Une fois cette transformation faite, la projection à un point s'écrit alors :

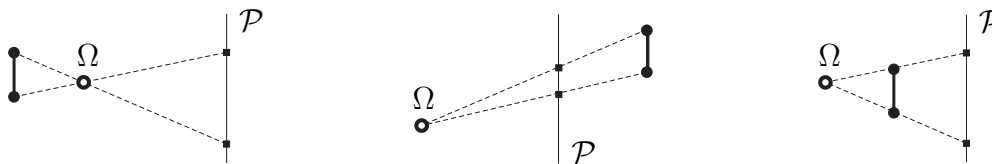
$$T_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 1 \end{bmatrix}$$

ce qui démontre qu'il s'agit bien d'une transformation projective. Cette matrice est appelée matrice de projection (projection transform).

Une remarque pratique sur la projection à un point

Il est nécessaire de bien comprendre les faits suivants :

- Cette projection n'a de sens pour nous que si les points projetés sont **devant** l'observateur. Exprimé géométriquement, cela signifie qu'on ne l'applique **que** aux points dont le z dans le repère de l'observateur est strictement positif. Il est donc nécessaire d'écartier strictement tous les autres points sous peine de voir des points **derrière** l'observateur se projeter **devant** lui sur le plan de projection (voir figure 1.6 (a)).
- Les déformations engendrées sont conformes avec les propriétés attendues. Plus un point est loin, plus sa projection est réduite. On notera que les objets au-delà du plan de projection rapetissent (voir figure 1.6 (b)), tandis que ceux situés entre le plan de projection et l'observateur apparaissent plus gros (figure 1.6 (c)).
- Le paramètre d calibre l'importance des déformations qu'engendre la projection à un point. Plus d est petit, et plus les déformations de perspective sont visibles. Plus d est grand, plus le résultat s'approche d'une projection parallèle.



(a) Attention, tout point placé derrière l'observateur se projette devant lui.

(b) Les objets placés au-delà du plan de projection rapetissent.

(c) Les objets placés entre l'observateur et le plan de projection grossissent.

FIG. 1.6 – Effet de la projection à un point en fonction de la position de l'objet à projeter.

3.3 Analogie avec l'appareil photographique

“Mais cela ne marche pas comme cela dans la réalité !” pourrait dire un étudiant de maîtrise. Il peut sembler paradoxal que la “rétine” de l'observateur (*i.e.* le plan de

projection) soit placée **devant** lui, et qu'il soit capable de voir des objets placés dans son oeil. Mais il s'agit seulement d'une équivalence géométrique utilisée pour simplifier l'exposé. En fait, cette projection est exactement équivalente au modèle d'appareil photographique "pinhole" (trou d'aiguille). Ce modèle est présenté à la figure 1.7 sur laquelle on montre que la projection sur le plan placé à une distance d du centre de projection donne des résultats symétriques que ce plan soit placé devant ou derrière le centre de projection. On constate également qu'en plaçant le plan de projection devant l'observateur, l'image projetée n'est pas inversée (voir le sens de la flèche entre les deux points sur les plans de projection et sur l'objet).

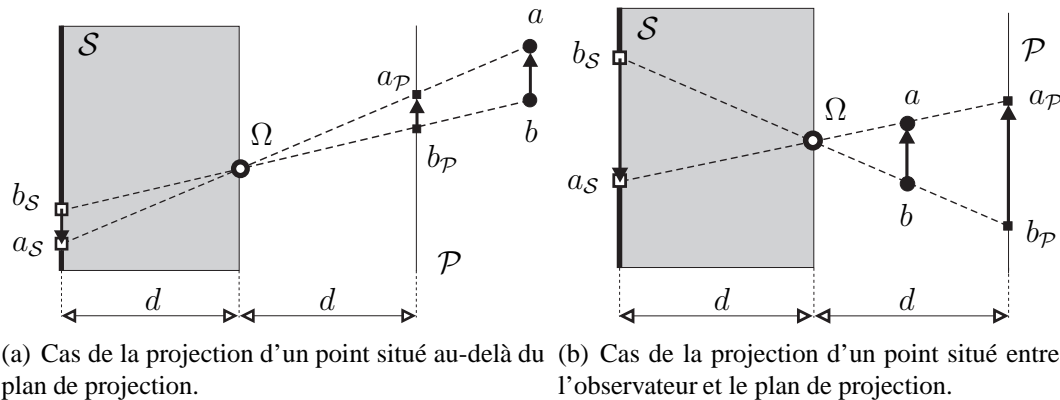


FIG. 1.7 – Modèle de l'appareil photographique "trou d'aiguille". La zone grisée représente l'intérieur de l'appareil. Le centre de projection Ω est la position du trou. La portion du plan \mathcal{S} en gras est la plaque photographique. La projection du point a sur le plan \mathcal{P} est notée a_P (notation similaire pour a_S , b_P et b_S).

Afin de finir d'ancrer ce modèle géométrique dans la réalité, nous continuons par des considérations photographiques :

- Comme nous l'avons vu dans la section précédente, le point Ω est la position du trou d'aiguille ("l'objectif") par lequel passe la lumière. En photographie, on appelle ce point le *point nodal*.
- La distance d s'appelle la *distance focale*.
- Le plan de projection peut être assimilé à la pellicule sur laquelle l'image se forme (se projette) lorsque l'on prend une photographie.
- La droite de vecteur directeur \mathbf{U} et passant par Ω est appelée l'*axe optique*. On la notera \mathcal{D} .
- Si on appelle Ω' le point d'intersection entre le plan de projection \mathcal{P} et l'axe optique \mathcal{D} alors ce point est le centre de l'image que l'on cherche à obtenir. Autrement dit, l'image recherchée est une petite zone du plan \mathcal{P} autour de ce point.

- La taille d’une photo sur une pellicule dans un appareil photographique est fixe (souvent $24\text{mm} \times 36\text{mm}$). Transposé dans notre modèle, cela revient à dire que la zone du plan contenant la projection à considérer est un rectangle de position et de taille fixes. On appellera la projection sur cette partie du plan l’*image projetée*.
- On appelle cône de vision le demi-cône de centre Ω , d’axe \mathcal{D}' , et de plus petite ouverture φ contenant l’image projetée (voir figure 1.8 et 1.11). φ est aussi appelée *largeur du champ de vision*. On notera que le champ de vision humain n’est pas à section circulaire, pas plus que celui associé à une photographie rectangulaire.

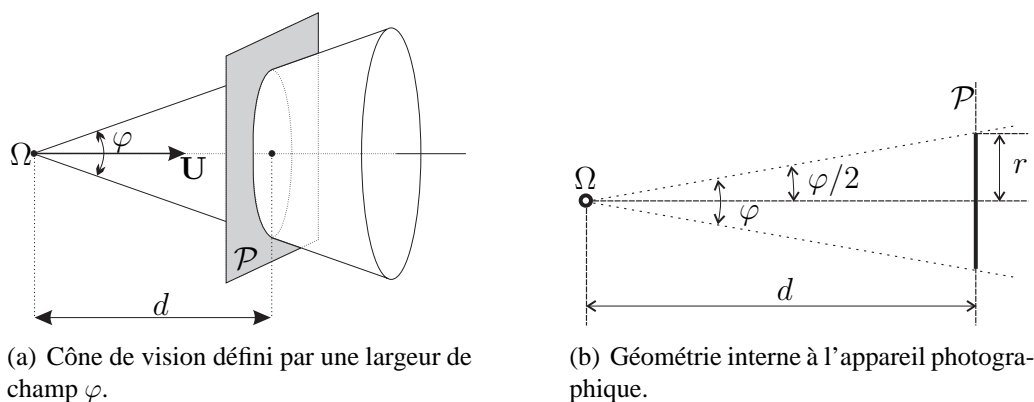


FIG. 1.8 – Les différents paramètres définissant le champ de vision de l’observateur.

Pour un utilisateur classique, la distance focale d n’a pas de sens intuitif, et surtout, elle n’est pas indicative des déformations liées à la perspective. Aussi, on lui préfère généralement la largeur φ du champ de vision (voir figure 1.8 (a)).

La figure correspondant à la géométrie de la scène est présentée à la figure 1.8. On en déduit immédiatement la relation suivante :

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{r}{d}$$

où φ est la largeur de champ, d est la distance focale, et r est le “rayon” de l’image (*i.e.* le rayon du cercle le plus petit contenant le rectangle de la photographie). Comme nous le précisons dans les préliminaires, ce r est une constante. Par conséquent (voir figure 1.8), la distance focale est égale à :

$$d = \frac{r}{\tan \frac{\varphi}{2}} \quad (1.8)$$

La valeur de r peut être choisie arbitrairement (on peut prendre par exemple $r = 1$). On peut également choisir une valeur de r plus en adéquation avec le matériel utilisé en photographie dans la réalité. En fixant l'échelle de la scène à 1 unité = $1mm$, et pour une pellicule de $24 \times 36mm$, alors la valeur de r égale à :

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{24^2 + 36^2} = 21.6$$

Il est alors possible de faire la correspondance directe¹⁵ entre les objectifs usuellement utilisés en photographie et la distance focale utilisée dans la scène avec la formule 1.8. La table 1.1 présente les valeurs de φ associées à différents objectifs. La dernière ligne de cette table (FOV vert.) est souvent celle utilisée en synthèse car elle indique la déformation minimale de perspective observable sur les bords, tandis que la première ligne indique la déformation maximale.

dist. focale	400mm	200mm	100mm	50mm	35mm	28mm	24mm
FOV diag. ($r = 21.6$)	6.2°	12.3°	24.4°	46.8°	63.4°	75.4°	84.1°
FOV horiz. ($r = 36/2$)	5.2°	10.3°	20.4°	39.6°	54.4°	65.5°	73.7°
FOV vert. ($r = 24/2$)	3.4°	6.9°	13.7°	27°	37.8°	46.4°	53.1°

TAB. 1.1 – Champ de vision φ (FOV=Field of Vision) associés aux différentes distances focales utilisées en photographie.

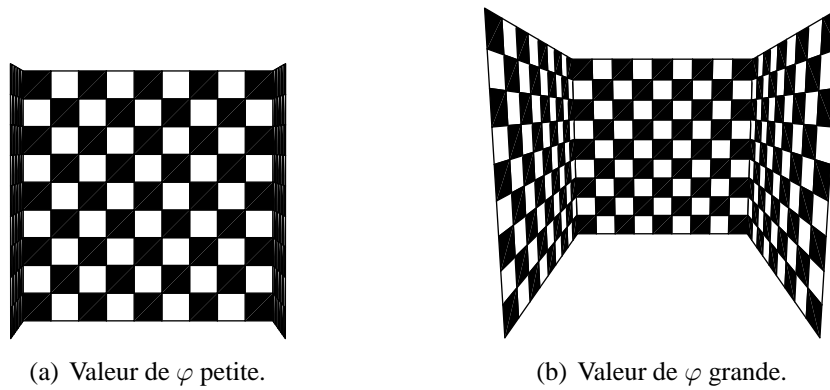
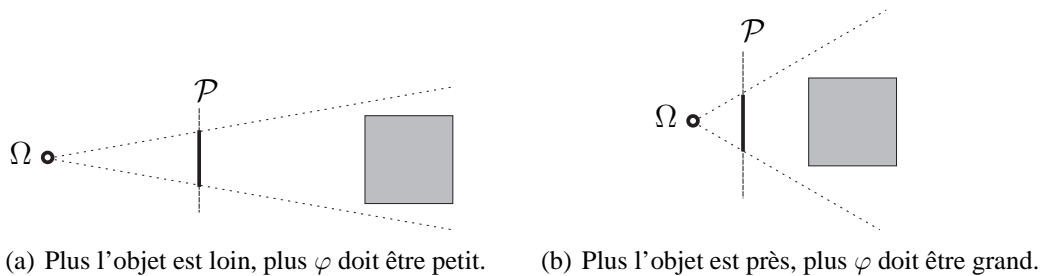
On observera sur la figure 1.9 que les petites valeurs φ offrent peu de déformations, les valeurs entre 15° et 40° donnent un aspect naturel, les valeurs au-delà de 40° donnent des résultats similaires aux objectifs grand-angle.

Afin de mieux comprendre le rôle que joue l'ouverture de l'objectif dans un dispositif photographique (donc également pour notre observateur), nous terminons sur l'exemple de la figure 1.10 :

- Si l'on souhaite voir complètement un gros objet proche de l'observateur, il n'y a pas d'autre choix que de prendre un champ de vision large.
- Inversement, si l'on souhaite zoomer sur un objet qui est loin ou qui est très petit, il n'y a pas d'autre choix que de prendre un champ de vision étroit.

Par conséquent, la position de l'observateur et la largeur de champ qu'occupe l'objet qu'il veut observer déterminent complètement la perspective observée sur le film photographique (pour nous, sur notre image de synthèse). Donc, si l'on souhaite observer un objet avec une certaine largeur de champ, il n'y a pas d'autre solution que de se déplacer.

¹⁵Par définition en photographie, utiliser un objectif de $50mm$ signifie que la distance focale de cet objectif est $50mm$.

(a) Valeur de φ petite.(b) Valeur de φ grande.**FIG. 1.9** – Influence de la valeur de la largeur de champ φ sur la perspective.(a) Plus l'objet est loin, plus φ doit être petit.(b) Plus l'objet est près, plus φ doit être grand.**FIG. 1.10** – Comment régler son appareil photographique virtuel. La plaque photographique est de taille fixe (en gras sur le plan de projection).

3.4 Retour à la grille de l'écran : film photographique virtuel

Dans cette partie, on s'intéresse à l'opération qui nous permet de passer de l'image projetée à une image numérique. On rappelle que :

- une image numérique est basiquement une matrice rectangulaire de valeurs.
- la taille de cette matrice correspond à la résolution de l'image. Par la suite, on notera $N \times M$ cette taille.
- à chaque valeur dans cette matrice correspond une couleur à travers une table (la Look-Up Table ou LUT). La LUT fait le lien entre un numéro d'index (le numéro de la couleur) et la couleur elle-même.

Le choix du changement de repère et de la projection à un point des sections précédentes implique que le cône de vision entier se projette sur le plan \mathcal{P} dans le cercle de centre Ω' et de rayon r (voir figure 1.11).

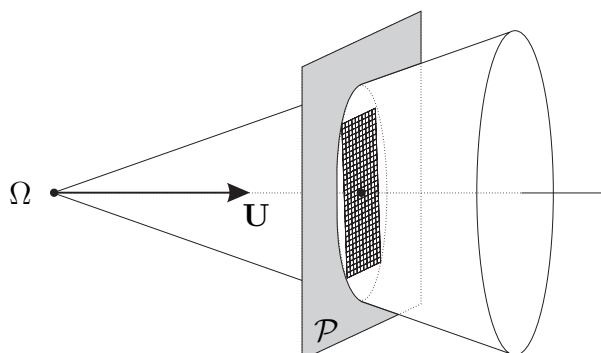


FIG. 1.11 – Position de la grille de l'écran dans le repère géométrique de l'observateur.

L'image projetée se formant sur le plan de projection, celui-ci joue par conséquent le rôle de film photographique virtuel. La photographie obtenue se définit alors comme une zone rectangulaire basée sur ce cercle (cf les 3 cas de la table 1.1).

La version numérique de cette photographie est obtenue en découpant cette photographie à l'aide d'une grille régulière :

- On choisit une grille de N carreaux horizontaux par M carreaux verticaux qui découpe l'image rectangulaire en petits carrés (sinon, l'image sera déformée¹⁶).
- A chacun des carreaux, on associe ses coordonnées dans la grille (i, j) où $i \in \{0, \dots, N-1\}$ et $j \in \{0, \dots, M-1\}$. On peut ainsi créer une bijection directe entre un carreau de la grille et un point de l'image numérique de taille $N \times M$. Au point de coordonnées (i, j) de l'image numérique (*i.e.* le pixel (i, j)) est associé le carreau de coordonnées (i, j) dans cette grille.
- Tout point dans le champ de vision dont la projection est dans le carreau (i, j) de la grille, contribue à la luminance du pixel (i, j) dans l'image numérique.

L'évaluation exacte de l'énergie reçu sur la totalité de la surface d'un pixel est un problème difficile, et la majorité des méthodes de rendu estime cette énergie à partir de quelques valeurs dans ce pixel (et souvent même une seule).

Pour comprendre les diverses implications du choix de ces valeurs, la lecture du chapitre ?? (échantillonnage et aliasing) est une nécessité (en particulier la section ??).

¹⁶à moins que le dispositif d'affichage ait des pixels non carrés. Dans ce cas, adapter la géométrie de la grille.

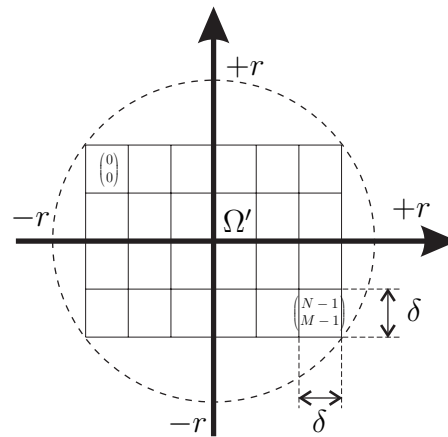


FIG. 1.12 – Grille de l'écran construite à partir de la zone visible par l'observateur (le cercle).

3.5 Pour aller plus loin dans les modèles d'appareils photographique

Plusieurs paramètres des appareils photographiques classiques n'ont pas été pris en charge dans ce modèle :

l'optique des lentilles : elle permet de simuler les effets de profondeur de champs (depth of field) et de mise-au-point de l'appareil photographique. A noter que l'ouverture du diaphragme joue sur l'importance du flou des objets sur lesquels la mise au point n'est pas faite (voir la section ?? du chapitre ??).

la vitesse d'obturation : elle permet de simuler les effets de flou de mouvement (motion blur) dans les animations. La durée d'exposition de chaque image de la pellicule fait qu'une image "accumule" plusieurs positions différentes d'un même objet (d'où l'effet de moyennage, donc de flou de l'objet en mouvement). Voir la section ?? du chapitre ??.

les propriétés de la pellicule : à savoir sa sensibilité, son grain, sa réponse. Ces aspects ne sont pas abordés dans ce document.

4 Objets géométriques élémentaires

Les coordonnées cartésiennes sont le système de coordonnées généralement utilisé en synthèse d'images pour plusieurs raisons :

- comme nous l'avons vu, la majorité des transformations usuelles s'écrivent dans l'espace cartésien sous forme linéaire.

- afin de diminuer la complexité algorithmique des objets géométriques que l'on cherche à représenter, ceux-ci sont souvent décomposés et approximés¹⁷ par des ensembles de polygones. Or, l'espace cartésien est particulièrement bien adapté pour la représentation de surfaces planes (sous forme d'une équation linéaire).

D'autres types de coordonnées (sphériques) ou d'orientations (angles d'Euler) s'avèrent plus adaptés dans le cas de certains problèmes spécifiques (comme par exemple le déplacement sur une sphère).

4.1 Équation d'une surface

4.1.1 Forme cartésienne

L'équation d'une surface géométrique est dite sous forme cartésienne si elle s'exprime seulement en fonction des coordonnées (x, y, z) et de constantes. La forme générale est la suivante :

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 & \text{(équation cartésienne de la surface)} \\ C_i(x, y, z) \leq 0, i = 1..n & \text{(contraintes sur les coordonnées } x, y, z) \end{cases}$$

Un point $P = (x, y, z)$ appartient alors à la surface si ses coordonnées vérifient l'ensemble de ces équations. La forme $F(x, y, z) = 0$ est également appelé **équation implicite** de la surface. Pour simplifier les notations, on écrira également $F(P)$ ou $C_i(P)$ lorsque l'on souhaite évaluer une équation cartésienne au point P .

Exemples : $x = 1$

plan parallèle à Oyz passant par $x = 1$. Tout point P de coordonnées $(1, y, z)$ vérifie cette équation où $(y, z) \in \mathbb{R}^2$. Dans le cadre de la définition, $F(x, y, z) = x - 1$ et il n'y a pas de contrainte C_i .

$$\begin{cases} x = 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ -1 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

carré inclus dans le plan $x = 1$. Les deux contraintes supplémentaires restreignent l'échelle de variation de y et z à un carré. Pour respecter la forme de la définition, ces contraintes peuvent se réécrire : $y - 1 \leq 0$, $-y - 1 \leq 0$, $z - 1 \leq 0$ et $-z - 1 \leq 0$.

¹⁷Cet opération revient à linéariser localement les objets.

4.1.2 Forme paramétrique

L'équation d'une surface géométrique est dite sous forme paramétrique si tout point S de la surface s'écrit :

$$\begin{cases} S(u, v) = [X(u, v) \ Y(u, v) \ Z(u, v)]^T & \text{(équation paramétrique de la surface)} \\ C_i(u, v) \leq 0, i = 1..n & \text{(contraintes sur les paramètres } u \text{ et } v) \end{cases}$$

où X , Y et Z sont des fonctions dépendant seulement des paramètres (u, v) et de constantes. L'étendue des valeurs des contraintes est généralement contrainte à des intervalles fermés (*i.e.* $u \in [u_{\min}, u_{\max}]$ et $v \in [v_{\min}, v_{\max}]$).

Exemples : $S(u, v) = [1 \ u \ v]^T$ plan $x = 1$ avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} S(u, v) = [1 \ u \ v]^T & \text{carré inclus dans le plan } x = 1. \text{ L'espace des paramètres } (u, v) \text{ est restreint de façon à contraindre le plan à un carré.} \\ -1 \leq u \leq 1 \\ -1 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Attention : aucune paramétrisation n'est unique car il est toujours possible d'effectuer un changement de paramètre (*i.e.* $(u, v) = T(u', v')$ où (u', v') sont les nouveaux paramètres et T une bijection quelconque).

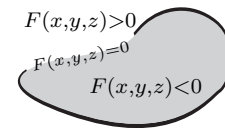
4.1.3 Utilisation pratique de ces deux formes

Chacune de ces deux formes est utilisée alternativement en fonction des besoins :

– *détermination de l'intérieur ou de l'extérieur d'une surface*

La forme cartésienne implicite $F(x, y, z)$ s'utilise pour déterminer si un point $P = (x_P, y_P, z_P)$ quelconque se trouve au dessus ou en dessous de la surface, car la surface définie par F sépare l'espace en deux (voir figure ci-dessous). Par exemple, on peut choisir la convention :

$$\begin{cases} F(x_P, y_P, z_P) < 0 & \text{alors } P \text{ est en-dessous la surface} \\ F(x_P, y_P, z_P) = 0 & \text{alors } P \text{ est sur la surface} \\ F(x_P, y_P, z_P) > 0 & \text{alors } P \text{ est au-dessus la surface} \end{cases}$$



Deux remarques sur l'utilisation de cette méthode :

– Il convient d'“orienter” correctement $F(x, y, z)$ de manière à ce que le signe à tester soit toujours le même (quitte à multiplier F par -1). Pour reprendre l'exemple précédent, si $F(x, y, z) = x - 1$, alors le dessus de la surface correspond aux points P dont le x_P est plus grand que 1. A l'inverse, si

$F(x, y, z) = 1 - x$, alors le dessus de la surface est pour les points P dont le x_P est plus petit que 1.

- La présence de contraintes rend cette méthode inconsistante car la surface $F(x, y, z)$ avec ses contraintes ne partage plus l'espace en deux (reprendre l'exemple du carré).

A noter que c'est ce même principe qui est utilisé en 2D dans l'algorithme de tracé de droite discrète de Bresenham (voir section ??) pour déterminer si l'on se trouve au-dessus ou en-dessous de la droite à tracer.

- *calcul d'intersections entre une surface et une courbe*

Pour calculer l'intersection entre une surface et une courbe, on utilise l'équation cartésienne pour la surface et l'équation paramétrique pour la courbe (i.e. $C(u) = [X(u) \ Y(u) \ Z(u)]^T$). On a donc les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 & \text{(surface sous forme cartésienne)} \\ C(u) = [X(u) \ Y(u) \ Z(u)]^T & \text{(courbe sous forme paramétrique)} \end{cases}$$

Par conséquent, le point d'intersection entre la surface et la courbe vérifie :

$$F(X(u), Y(u), Z(u)) = 0$$

équation dont la seule inconnue est u . Si on note u^* la solution de cette équation, les coordonnées du point d'intersection sont donc $C(u^*) = [X(u^*) \ Y(u^*) \ Z(u^*)]^T$. C'est cette méthode qui est utilisée dans la méthode du ray-tracing pour calculer l'intersection entre un rayon et un objet.

- *représentation de la surface*

La forme paramétrique permet d'obtenir directement les coordonnées des points constituant la surface en faisant varier la valeur des paramètres sur leurs espaces de définition respectifs.

La représentation des surfaces paramétriques non triviales s'obtient généralement en échantillonnant l'espace des paramètres (u, v) , ce qui permet d'obtenir un échantillonnage de la surface, sur lequel on peut se baser pour construire une approximation polygonale de la surface (voir chapitre ??).

- *évaluation des tangentes et de la normale*

En tout point d'une surface, on peut définir deux vecteurs tangents à cette surface qui sont portés par le plan tangent à la surface en ce point (voir figure 1.13). Un vecteur normal à la surface en ce point est orthogonal à la surface tangente, et peut donc être obtenu par produit vectoriel de deux vecteurs tangents.

On considère alors les deux cas :

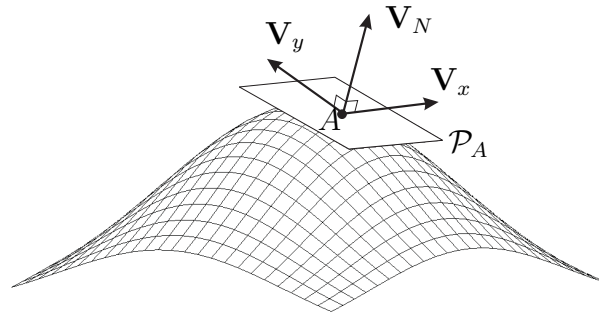


FIG. 1.13 – Exemple de tangentes et de normales à une surface. Les vecteurs tangents \mathbf{V}_x et \mathbf{V}_y à la surface au point A sont tous dans le plan tangent \mathcal{P} . La normale \mathbf{V}_N est orthogonale à ce plan

– *forme cartésienne*

Le fait qu'une équation implicite divise l'espace en deux parties a pour conséquence que si $P=(x,y,z)$ est un point de la surface, alors la normale en ce point est définie par :

$$\mathbf{V}_N(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{bmatrix} (x, y, z) \quad (1.9)$$

car le gradient sur la surface est orienté de l'intérieur vers l'extérieur (donc, attention à l'orientation de la surface).

Deux vecteurs tangents ($\mathbf{V}_x(x, y, z), \mathbf{V}_y(x, y, z)$) se déterminent alors facilement :

– en choisissant un premier vecteur \mathbf{V}_x non nul tel que :

$$\mathbf{V}_x \cdot \mathbf{V}_N = 0$$

en fixant par exemple deux de ses trois coordonnées à 1, et en choisissant la dernière de façon à ce que le produit scalaire soit nul.

– puis, le vecteur \mathbf{V}_y se calcule grâce au produit vectoriel avec :

$$\mathbf{V}_y = \mathbf{V}_N \wedge \mathbf{V}_x$$

Attention, en fonction des applications, il peut s'avérer nécessaire de normaliser les vecteurs obtenus¹⁸.

¹⁸Dans ce cas, se souvenir que le produit vectoriel de deux vecteurs normalisés est un vecteur normalisé seulement s'ils sont orthogonaux (reprendre la définition du produit vectoriel). Sauf exception, il faut par conséquent normaliser le résultat du produit vectoriel.

cas particulier du plan : dans le cas d'un plan d'équation générique $F(x, y, z) = a.x + b.y + c.z + d$, on obtient en utilisant l'équation 1.9 :

$$\mathbf{V}_N = [a \quad b \quad c]^T$$

Par conséquent, la forme cartésienne d'un plan permet de déterminer immédiatement une normale au plan.

– *forme paramétrique*

Les deux vecteurs tangents à la surface peuvent s'obtenir simplement en calculant les dérivées partielles par rapport aux paramètres u et v . On obtient alors deux vecteurs tangents ($\mathbf{S}_u(u, v)$, $\mathbf{S}_v(u, v)$) à la surface au point $S(u, v)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_u(u, v) &= \frac{\partial S}{\partial u}(u, v) & \mathbf{S}_v(u, v) &= \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial Z}{\partial u} \end{bmatrix} (u, v) & & = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial v} \\ \frac{\partial Z}{\partial v} \end{bmatrix} (u, v) \end{aligned}$$

Notons que ces deux vecteurs ne sont pas nécessairement orthogonaux, et qu'ils n'ont généralement pas de raison d'être normalisés.

Le vecteur normal $\mathbf{S}_N(u, v)$ à la surface au point $S(u, v)$ s'obtient enfin avec :

$$\mathbf{S}_N(u, v) = \mathbf{S}_u(u, v) \wedge \mathbf{S}_v(u, v)$$

Il faut donc penser à normaliser \mathbf{S}_N si le contexte l'exige.

Dans le cas de certaines surfaces paramétriques (Bezier, Spline, ...), les vecteurs tangents et normaux peuvent s'obtenir directement à partir des coefficients de la surface (voir chapitre ??).

4.1.4 Passage d'une forme à l'autre

Passage de la forme paramétriques à la forme carthésienne La technique consiste à éliminer les paramètres pour ne laisser apparaître que les variables spatiales.

Exemple : pour la surface $S(u, v) = [X(u, v) \quad Y(u, v) \quad Z(u, v)]$, résoudre les systèmes suivant pour exprimer (u, v) en fonction (x, y) :

$$\begin{cases} x = X(u, v) \\ y = Y(u, v) \end{cases}$$

Puis, remplacer les valeurs de (u, v) trouvées dans $Z(u, v)$.

Une variation classique de cette méthode consiste à éliminer certains paramètres en utilisant des relations comme $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ (cas de la sphère, du cylindre ...).

Passage de la forme cartésienne à la forme paramétrique En général, il n'y a aucun lien évident car la paramétrisation dépend souvent directement de la géométrie de la surface et que celle-ci apparaît dans l'équation cartésienne de la surface sous une forme très différente (on comparera plus loin par exemple les formes cartésiennes et paramétriques d'un plan ; si l'une utilise la normale, l'autre utilise les tangentes). Par ailleurs, il n'y a pas de paramétrisation unique d'une surface.

4.2 Objets géométriques élémentaires

Nous donnons maintenant les expressions cartésiennes et paramétriques des objets élémentaires utilisés en synthèse. On notera $P = (x, y, z)$ un point quelconque de l'objet.

4.2.1 Plan

– *constantes*

$$A = [A_x \ A_y \ A_z]^T \quad \text{un point du plan}$$

$$N = [a \ b \ c]^T \quad \text{un vecteur normal au plan}$$

$$U = [U_x \ U_y \ U_z]^T \quad \text{deux vecteurs non colinéaires et tangents au plan}$$

$$V = [V_x \ V_y \ V_z]^T \quad (\text{obtenus à partir de } N \text{ et tels que } N \equiv U \wedge V)$$

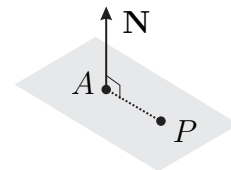
– *cartésien*

On utilise le fait que le produit scalaire entre la normale N au plan et un vecteur construit à partir de deux points quelconques (A et P) appartenant au plan est nul (puisque nécessairement orthogonaux).

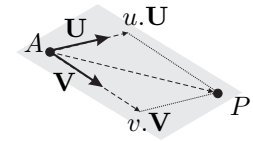
$$N \cdot (P - A) = a.x + b.y + c.z + d = 0$$

où $d = -A \cdot N$

– *paramétrique*



$$\begin{cases} S(u, v) = A + u.\mathbf{U} + v.\mathbf{V} \\ \text{avec } (u, v) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$



Cas particulier : le parallélogramme vu comme un plan contraint

- *cas cartésien* : on limite l'échelle de variation sur deux des paramètres parmi x , y et z (par exemple x et y). Le troisième paramètre étant, lui, calculé à partir de l'équation cartésienne du plan.

L'obtention de rectangles ou de carrés n'est possible que si un des vecteurs de la base cartésienne est normale au plan (car si la projection sur le plan Oxy est bien, elle, rectangulaire, dans le cas général, l'objet est un parallélépipède non rectangle).

- *cas paramétrique* : on limite l'échelle de variations des deux paramètres u et v . Contrairement au cas précédent, il est facile d'obtenir des parallélépipèdes rectangles en choisissant \mathbf{U} et \mathbf{V} orthogonaux (*i.e.* tels que $\mathbf{U}.\mathbf{V} = 0$).

4.2.2 Droite

- *constantes*

$$A = [A_x \quad A_y \quad A_z]^T \quad \text{un point de la droite}$$

$$\mathbf{U} = [U_x \quad U_y \quad U_z]^T \quad \text{un vecteur directeur}$$

$$\mathbf{V}_1 = [a_1 \quad b_1 \quad c_1]^T \quad \text{deux vecteurs non colinéaires et orthogonaux à } \mathbf{U}$$

$$\mathbf{V}_2 = [a_2 \quad b_2 \quad c_2]^T \quad \text{(obtenus à partir de } \mathbf{U} \text{ et tels que } \mathbf{U} \equiv \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2)$$

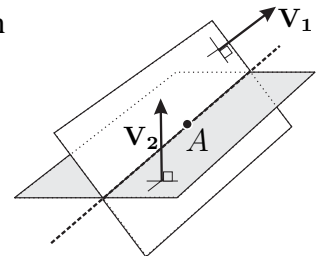
- *cartésien*

L'équation de la droite \mathcal{D} est obtenue comme intersection de deux plans :

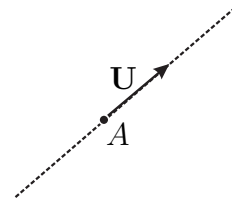
$$\begin{cases} \mathbf{V}_1.(P - A) = a_1.x + b_1.y + c_1.z + d_1 = 0 & (\mathcal{P}_1) \\ \mathbf{V}_2.(P - A) = a_2.x + b_2.y + c_2.z + d_2 = 0 & (\mathcal{P}_2) \end{cases}$$

$$\text{avec } d_1 = -A.\mathbf{V}_1 \text{ et } d_2 = -A.\mathbf{V}_2.$$

- *paramétrique*



$$C(u) = A + u \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} A_x + u \cdot U_x \\ A_y + u \cdot U_y \\ A_z + u \cdot U_z \end{bmatrix} \quad \text{avec } u \in \mathbb{R}$$



4.2.3 sphère de centre O

- constantes
 - O le centre de la sphère
 - R son rayon
- cartésien

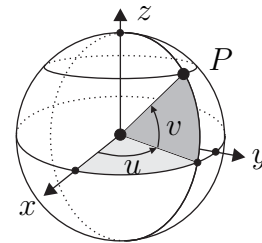
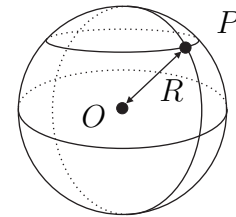
La sphère est définie comme l'ensemble des points P dont la distance euclidienne au point O est R . Soit $d(O, P) = R$, ce qui se réécrit :

$$(O - P) \cdot (O - P) = R^2 \iff x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

- paramétrique

On utilise les coordonnées sphériques :

$$S(u, v) = \begin{bmatrix} R \cdot \cos v \cdot \cos u \\ R \cdot \cos v \cdot \sin u \\ R \cdot \sin v \end{bmatrix} \quad \text{avec } \begin{matrix} v \in [-\pi/2, \pi/2] \\ u \in [0, 2\pi) \end{matrix}$$



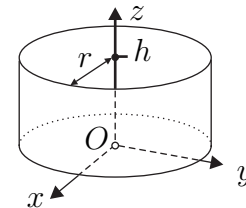
4.2.4 cylindre creux de centre O et d'axe Oz

- constantes
 - O son centre
 - R son rayon
 - H sa hauteur
- cartésien

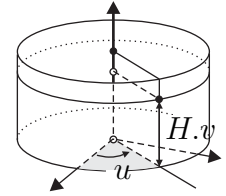
Un tel cylindre est un cercle dans le plan Oxy et contraint en z :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ 0 \leq z \leq H \end{cases}$$

- paramétrique



$$S(u, v) = \begin{bmatrix} R \cdot \cos u \\ R \cdot \sin u \\ H \cdot v \end{bmatrix} \quad \text{avec } \begin{matrix} v \in [0, 1] \\ u \in [0, 2\pi) \end{matrix}$$



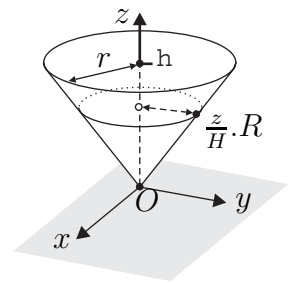
4.2.5 cône creux de centre O et d'axe Oz

Le cône est une variation sur le thème du cylindre en faisant évoluer le rayon du cercle en même temps que l'on se déplace sur l'axe Oz .

- constantes
 - O son centre
 - H sa hauteur
 - R son rayon (à la hauteur H)
- cartésien

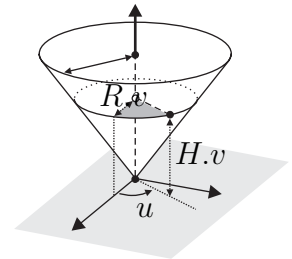
Un tel cylindre est un cercle dans le plan Oxy et contraint en z :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \left(\frac{z}{H} \cdot R\right)^2 \\ 0 \leq z \leq H \end{cases}$$



- paramétrique

$$S(u, v) = \begin{bmatrix} R \cdot v \cdot \cos u \\ R \cdot v \cdot \sin u \\ H \cdot v \end{bmatrix} \quad \text{avec } \begin{matrix} v \in [0, 1] \\ u \in [0, 2\pi) \end{matrix}$$

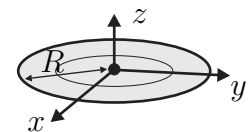


4.2.6 Disque de centre O dans le plan Oxy

- constantes
 - O son centre
 - R son rayon

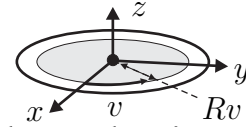
- cartésien

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 \leq R^2 \end{cases}$$



– paramétrique

$$S(u, v) = \begin{bmatrix} R.v. \cos u \\ R.v. \sin u \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } v \in [0, 1] \\ u \in [0, 2\pi)$$



Un disque plein est utilisé pour fermer les extrémités des cylindres ou des cônes. Comparez ces expressions à celle du cylindre et du cône.

4.2.7 facette

– constantes

A_1, A_2 et A_3 les trois sommets de la facette définissant le plan \mathcal{P}

$\mathbf{V}_{12} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ deux vecteurs de déplacement de A_1 vers les autres sommets

$\mathbf{V}_{13} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_3$

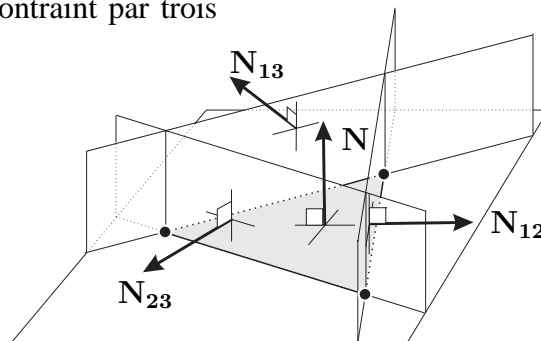
\mathbf{N} normale à la facette ($\mathbf{N} = \mathbf{V}_{12} \wedge \mathbf{V}_{13}$)

$\mathbf{N}_{12}, \mathbf{N}_{13}, \mathbf{N}_{23}$ trois vecteurs normaux correspondant à trois plans passant par les arêtes (A_1, A_2) , (A_1, A_3) et (A_2, A_3) , et orientés vers l'extérieur de la facette.

– cartésien

Il n'existe pas vraiment d'équation pratique à utiliser d'une facette en cartésien. Il s'agit d'un plan contraint par trois autres plans (un par arête) :

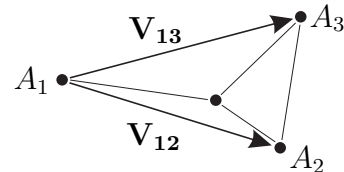
$$\begin{cases} (A_1 - P) \cdot \mathbf{N} = 0 \\ (A_1 - P) \cdot \mathbf{N}_{12} \leq 0 \\ (A_1 - P) \cdot \mathbf{N}_{13} \leq 0 \\ (A_2 - P) \cdot \mathbf{N}_{23} \leq 0 \end{cases}$$



– paramétrique

Sous forme paramétrique, une facette possède l'écriture agréable suivante :

$$S(u, v) = A_1 + u \cdot \mathbf{V}_{12} + v \cdot \mathbf{V}_{13} \\ = (1 - u - v) \cdot A_1 + u \cdot A_2 + v \cdot A_3 \\ \text{avec } (u, v) \in [0, 1]^2 \text{ et } 0 \leq u + v \leq 1$$



C'est, par exemple, cette expression qui est utilisée pour le calcul de l'intersection entre un rayon et une facette.

4.2.8 Surfaces

D'autres types d'objets seront également considérés comme des objets élémentaires. Nous ne les présentons pas dans cette section car ils constituent à eux seuls des chapitres entiers :

- Les surfaces de Bezier, spline ou par subdivision (voir chapitre ??).
- Les surfaces implicites (voir chapitre ??).

4.3 Transformation affine d'un objet

L'incorporation d'un objet dans une scène implique presque obligatoirement l'application de plusieurs transformations affines afin de le mettre en situation (mise à l'échelle, rotations, translation, ...). On peut également profiter du pouvoir déformant des transformations non rigides afin de donner à l'objet des formes inhabituelles (par exemple, en appliquant un cisaillement sur une sphère). En pratique, il est par conséquent assez rare qu'un objet ne subisse aucune transformation. Comme ce sont les propriétés géométriques de l'objet dans le repère global (celui après transformation) qui nous intéressent, plutôt que dans son repère local (celui intrinsèque à l'objet), nous indiquons donc dans cette section la façon pratique de gérer les objets transformés.

4.3.1 Repère local ou repère global ?

Considérons un objet \mathcal{O} dont on connaît les propriétés dans son repère local et T la transformation permettant de passer du repère local dans le repère global.

Deux approches sont généralement adoptés :

approche "repère global" : on utilise directement l'équation de l'objet $T(\mathcal{O})$ dans le repère global (voir la section 4.3.2 pour le calcul pratique).

approche "repère local" : tout calcul sur l'objet est exprimé dans le repère local, puis le résultat du calcul est transformé dans le repère global en utilisant la transformation T .

Exemple 1 *Calcul d'un point d'intersection dans le repère global entre l'objet \mathcal{O} (défini dans le repère local) et une droite D du repère global. Calculer $D' = T^{-1}(D)$ l'image de la droite D dans le repère local de l'objet. Calculer un point d'intersection P entre D' et \mathcal{O} . Le point d'intersection recherché est alors $T(P)$.*

Cette approche exige donc d'utiliser la transformation T deux fois : une fois pour transposer le problème dans le repère local, et une fois pour passer dans le repère global le résultat obtenu dans le repère local.

On consultera également la section 4.3.3 pour le cas spécifique de la transformation affine des normales.

La majorité des calculs s'effectuant dans le repère global, l'approche "repère global" est plus directe et performante. Mais, les expressions algébriques des objets peuvent devenir complexes. Cette approche est en général préférable pour les objets facettisés ou construits à partir de combinaisons linéaires de points (Bezier, ...).

L'approche locale offre une plus grande souplesse notamment pour la construction d'objets ou de scènes complexes (voir section 5 pour l'approche générale).

4.3.2 Équation d'un objet après une transformation affine

Si les équations des objets sont connues sous forme cartésienne ou paramétrique, que deviennent ces équations après une transformation affine ? On peut répondre à cette question dans le cas où cette transformation est un changement de repère. Elle se généralise immédiatement aux transformations affines générales.

On considère le changement de repère usuel d'un point P d'un repère \mathcal{R} (dans lequel P a pour coordonnées P) à un repère \mathcal{R}' (dans lequel P a pour coordonnées P'). Alors, les changements de repère s'écrivent (voir équation 1.4) :

$$\begin{aligned}\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}' &: P' = M.(P - O') \\ \mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R} &: P = M^T.P' + O'\end{aligned}$$

où M est la matrice de changement de repère (sens $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$) et O' le centre du nouveau repère (dans \mathcal{R}).

– cas cartésien

$$\begin{aligned}\text{ancien repère} & F(P) = 0 \\ \text{nouveau repère} & F(M^T.P' + O') = 0\end{aligned}$$

L'équation dans le nouveau repère s'exprime bien seulement en fonction de P' , les coordonnées de P dans le nouveau repère. Le sens de conversion utilisé est $\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}$. Dans le cas d'une transformation affine générale, cette forme pose un problème si la matrice de transformation M n'est pas inversible : l'application linéaire n'est alors plus une bijection et il n'est plus possible d'associer à un point P' de \mathcal{R}' un seul point P de \mathcal{R} .

– cas paramétrique

$$\begin{aligned}\text{ancien repère} & S(u, v) = \begin{bmatrix} X(u, v) \\ Y(u, v) \\ Z(u, v) \end{bmatrix} \\ \text{nouveau repère} & S'(u, v) = M. \left(\begin{bmatrix} X(u, v) \\ Y(u, v) \\ Z(u, v) \end{bmatrix} - O' \right)\end{aligned}$$

$S(u, v)$ est un point de l'ancien repère. Le sens de conversion à utiliser est $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$, et l'équation $S'(u, v)$ est bien celle recherchée. Les paramètres (u, v) ne changent pas.

Conséquence importante : Si l'objet s'écrit comme une combinaison linéaire de points (ou de vecteurs), alors l'objet transformé garde la même équation avec les points (ou vecteurs) transformés¹⁹. Par exemple,

le segment PQ s'écrit $D(u) = u.P + (1 - u).Q$ avec $u \in [0, 1]$. Dans le nouveau repère, son expression devient :

$$\begin{aligned} D'(u) &= M.(D(u) - O') \\ &= u.[M.(P - O')] + (1 - u).M.(Q - O') \\ &= u.P' + (1 - u).Q' \end{aligned}$$

où P' et Q' sont les coordonnées des points P et Q dans le repère \mathcal{R}' . Cela montre donc que le segment entre les points de coordonnées P et Q dans le repère \mathcal{R} se transforme (fort heureusement) en le segment entre les points de coordonnées P' et Q' dans le repère \mathcal{R}' . On généralise facilement cette démonstration à une facette ou à un polygone.

le plan (sous forme paramétrique) $S(u, v) = P + u.U + v.V$. Dans le nouveau repère, son expression devient :

$$\begin{aligned} S'(u, v) &= M.(S(u, v) - O') \\ &= [M.(P - O')] + u.M.U + v.M.V \\ &= P' + u.U' + v.V' \end{aligned}$$

où P' sont les coordonnées de P dans le repère \mathcal{R}' , et U' et V' sont les coordonnées des vecteurs U et V dans la base de vecteur du repère \mathcal{R}' .

Il suffit donc de transformer les points ou vecteurs définissant l'objet pour le reconstruire complètement dans le nouveau repère. Les objets classiques possédant cette propriété sont donc évidemment les droites, les plans (ou leurs restrictions), mais également les courbes et surfaces de Bézier et spline (la dépendance est linéaire, les coefficients sont quadratiques - voir chapitre ??).

Pour les autres cas, il n'y a pas d'autres choix que d'appliquer la transformation en chacun des points de l'objet.

¹⁹car le changement de repère est une transformation affine. Cette propriété est une conséquence directe de la conservation du barycentre (voir la note en bas de la page 17).

4.3.3 Effet d'une transformation affine sur les normales à un objet

En toute généralité, l'application d'une transformation affine sur un objet **change les normales ou les tangentes à sa surface**. Or, il est fréquent de précalculer la valeur des normales à un objet, ou que l'évaluation de celles-ci aient un coût algorithmique important. En conséquence, lorsque l'on applique une transformation affine, il est intéressant de savoir comment calculer les nouveaux vecteurs à partir de ceux déjà existants.

Cas des tangentes

Pour essayer de mieux comprendre ce qui se produit lorsque l'on applique une transformation affine à une surface, examinons la transformation affine d'une surface paramétrique $S(u, v)$. Pour tout (u, v) , la surface $T(u, v)$ transformée est :

$$T(u, v) = A.S(u, v) + B$$

Par conséquent, les tangentes subissent la transformation A puisque :

$$\frac{\partial T}{\partial u} = A \cdot \frac{\partial S}{\partial u} \text{ et } \frac{\partial T}{\partial v} = A \cdot \frac{\partial S}{\partial v}$$

Cas de la normale

Mais qu'en est-il de la normale ? Si on prend maintenant la même surface sous forme cartésienne $F(P) = 0$, et qu'on lui applique la même transformation ($P' = A.P + B$), l'équation de la surface transformée est $F(A^{-1}P' - A^{-1}B) = 0$. On a vu que l'équation de la normale à la surface était :

$$\mathbf{N} = \nabla F(P) = (\partial F / \partial x, \partial F / \partial y, \partial F / \partial z)(P)$$

En utilisant la loi de dérivation des fonctions composées²⁰, la normale à la surface transformée va donc se calculer en deux étapes :

1. calcul de la dérivée au point après une transformation affine :

Pour la coordonnées x , on a :

$$\frac{\partial}{\partial x}(A^{-1}P' - A^{-1}B) = A_x^{-1}$$

où on note $[A_x^{-1} \ A_y^{-1} \ A_z^{-1}]$ la matrice A^{-1} écrite avec ses vecteurs colonnes.

Par conséquent,

$$\nabla (A^{-1}P' - A^{-1}B) = \begin{bmatrix} A_x^{-1} \\ A_y^{-1} \\ A_z^{-1} \end{bmatrix} = (A^{-1})^T$$

²⁰**Rappel :** $f(g(x))' = g'(x).f'(g(x))$.

2. calcul de l'expression de la normale après transformation affine :

$$\begin{aligned}\nabla F(\mathbf{A}^{-1}P' - \mathbf{A}^{-1}B) &= \nabla(\mathbf{A}^{-1}P' - \mathbf{A}^{-1}B) \cdot (\nabla F)(\mathbf{A}^{-1}P' - \mathbf{A}^{-1}B) \\ &= (\mathbf{A}^{-1})^T \cdot (\nabla F)(P) \\ &= (\mathbf{A}^{-1})^T \cdot \mathbf{N}\end{aligned}$$

Donc, la normale \mathbf{N} à la surface est transformée par la matrice $(\mathbf{A}^{-1})^T$.

Remarque géométrique

Si on considère maintenant la normale \mathbf{N} et une tangente \mathbf{T} en un point d'une surface, on a par construction $\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0$.

Une fois la transformation affine appliquée, le produit scalaire de ces vecteurs transformés s'écrit (en calcul matriciel) :

$$((\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{N})^T (\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}) = (\mathbf{N}^T \mathbf{A}^{-1}) (\mathbf{A} \mathbf{T}) = \mathbf{N}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{N}^T \mathbf{T} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0$$

Donc les vecteurs transformés $(\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{N}$ et $\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$ obtenus donc sont bien orthogonaux.

Utilisation pratique On note \mathbf{N} le vecteur normal et \mathbf{T} un vecteur tangent à un point de la surface avant la transformation affine. Alors l'expression \mathbf{N}' et \mathbf{T}' de ces mêmes vecteurs après transformation de la surface par la transformation affine $P' = \mathbf{A} \cdot P + B$ est :

transformations invariantes : l'identité ou la translation²¹ sont des opérations qui laissent les vecteurs invariants. Par conséquent :

normale : $\mathbf{N}' = \mathbf{N}$

tangentes : $\mathbf{T}' = \mathbf{T}$

transformations rigides : elles conservent les distances. Par conséquent, *les normes des vecteurs sont également conservées.*

normale : $\mathbf{N}' = (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{N}$

tangentes : $\mathbf{T}' = \mathbf{A} \mathbf{T}$

On notera que dans le cas des transformations affines orthogonales ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$), on a $(\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{A}$. Donc, les normales et les tangentes subissent la même transformation.

²¹**Rappel** : la translation n'a pas de sens dans un espace vectoriel. Dans un espace affine, la translation d'un vecteur défini par deux points laisse le vecteur invariant.

cas général : Les distances n'étant pas conservées, les normes ne sont pas conservées.

Par conséquent, il est généralement prudent *de faire suivre immédiatement la transformation par une renormalisation*, afin d'éviter des erreurs notamment lors de calculs de produits scalaires par la suite. Par conséquent, la transformation normalisée s'écrit :

$$\mathbf{N}' = (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{N} / |(\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{N}|$$

$$\mathbf{T}' = \mathbf{A} \mathbf{T} / |\mathbf{A} \mathbf{T}|$$

Ces problèmes de transformation ont motivé l'utilisation de l'espace tangent lors d'application spécifique faisant intervenir la normale, comme le bump-mapping (voir chapitre ?? page ??).

5 Construction d'une scène ou d'objets complexes

5.1 Modèle hiérarchique

La première étape de la création d'une image de synthèse passe par la construction géométrique du monde virtuel (que l'on appellera aussi la scène) à représenter. Cette création s'effectue schématiquement en deux étapes : la création indépendante de chaque objet présent dans l'image, puis le placement de tous les objets dans la scène. Le modèle hiérarchique est un moyen de représenter les données et les objets d'une scène de manière à faciliter la gestion de la cohérence de la scène et des transformations géométriques.

5.1.1 Construction d'objets complexes

Généralement, un objet complexe peut se décomposer comme un assemblage d'objets plus simples (et ceci éventuellement récursivement) jusqu'à obtenir des objets élémentaires²².

Cette décomposition fait apparaître naturellement une **structure hiérarchique**. Cette structure hiérarchique se définit de la façon suivante (voir figure 1.14, mais aussi l'exemple présenté de la figure 1.15) :

- A chaque feuille, un objet élémentaire.
- Sur les arêtes, la transformation permettant de placer le fils dans le repère du père.

²²Par objets élémentaires, on entend : tout objet 3D élémentaire : sphère, cylindre, cône, tore, ... (voir section 4), toute surface paramétrique (voir le chapitre ??), tout objet facettisé (défini comme une union de polygone, voir ci-après ??).

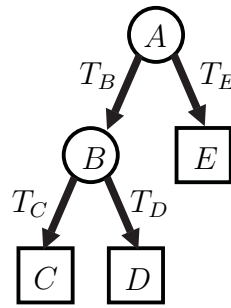


FIG. 1.14 – Exemple de structure hiérarchique associée à un objet complexe.

Un nœud représente l'union de l'ensemble des objets correspondant à ses fils, à chacun desquels on applique la transformation spécifiée sur l'arête que le relie à son père. Si l'on prend l'exemple de la figure ci-contre (avec l'écriture $T.A$ pour noter la transformation de l'objet A avec la transformation T), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \text{objet } B &= T_C.C \cup T_D.D \\
 \text{objet } A &= T_B.(\text{objet } B) \cup T_E.E \\
 &= T_B.(T_C.C \cup T_D.D) \cup T_E.E \\
 &= T_B.T_C.C \cup T_B.T_D.D \cup T_E.E
 \end{aligned}$$

On en déduit, par exemple, que l'objet élémentaire C est assemblé avec l'objet complexe A à travers la suite de transformations $T_B.T_C$.

Lors du parcours préfixe de l'arbre, les transformations à appliquer peuvent se gérer comme une **pile FILO**, avec les règles suivantes :

- Une descente dans l'arbre correspond à empiler la transformation présente sur l'arête.
- A l'arrivée à une feuille, on possède la liste des transformations (contenu complet de la pile dans le sens sommet \rightarrow fond) à appliquer pour placer l'objet élémentaire dans l'objet complexe.
- Une remontée dans l'arbre correspond à un dépilement de la transformation au sommet de la pile.

Sur l'exemple précédent, nous montrons comment ce principe peut être utilisé pour afficher un objet :

Déplacements	Position	Actions	Etat de la pile
	A	initialisation	{}
$A \searrow B$	B	empiler T_B	$\{T_B\}$
$B \searrow C$	C	empiler T_C	$\{T_C, T_B\}$
		afficher $T_B.T_C.A$	
$C \nearrow B$	B	dépiler T_C	$\{T_B\}$
$B \searrow D$	D	empiler T_D	$\{T_D, T_B\}$
		afficher $T_B.T_D.D$	
$D \nearrow B$	B	dépiler T_D	$\{T_B\}$
$B \nearrow A$	A	dépiler T_B	{}
$A \searrow E$	E	empiler T_E	$\{T_E\}$
		afficher $T_E.E$	
$E \nearrow A$	A	fin	

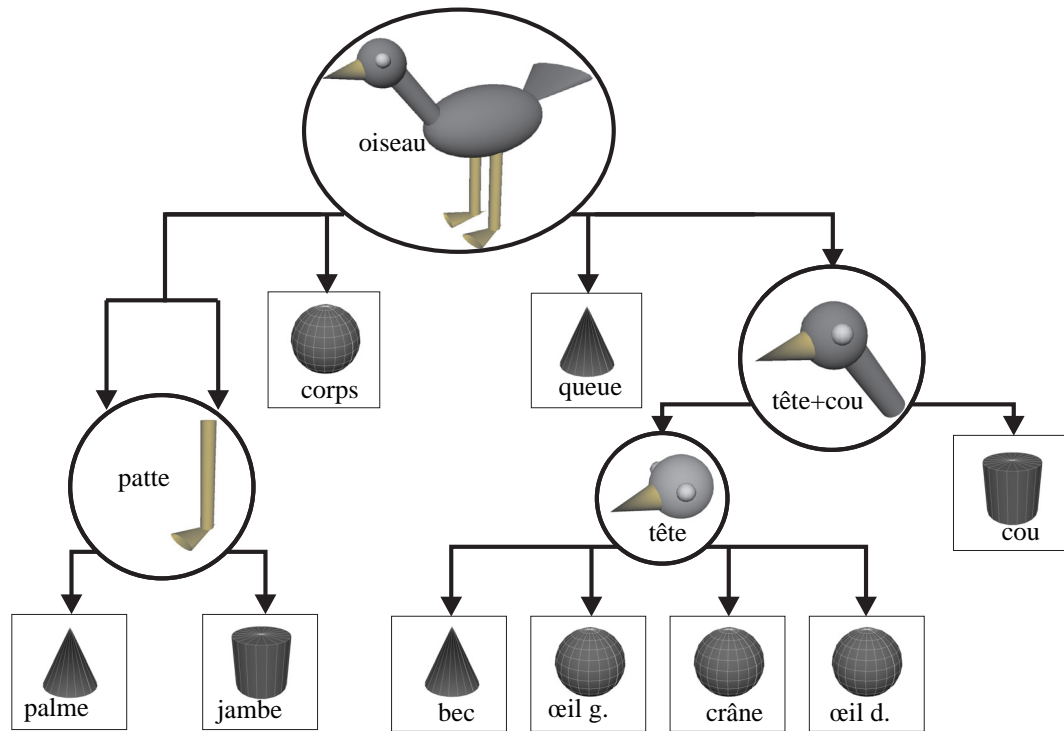
Un exemple de construction d'objet complexe complet est présenté à la figure 1.15. Il nous permet de développer deux nouvelles notions sur cette hiérarchie :

- L'arbre présenté n'est pas une hiérarchie mais un graphe orienté acyclique²³. Afin de donner une plus grande souplesse dans les constructions, on autorise la réutilisation d'objets déjà définis. Dans le cas de la figure 1.15(b), ce principe est utilisé sur les pattes de l'oiseau : la patte est définie une fois et placée deux fois dans la scène. Le nombre de pères d'un nœud ou d'une feuille correspond ainsi au nombre de fois où l'objet qu'il représente est utilisé dans la scène. On peut prolonger ce principe et ne définir qu'un seul objet par type d'objet élémentaire. La hiérarchie figure 1.15(a) peut gagner en compacité en ne définissant que 3 feuilles (sphère, cylindre et cône), mais perd de sa clarté d'exposition : l'organisation hiérarchique n'est alors plus une évidence (la dessiner pour s'en convaincre).
- Chaque arête de ce graphe correspond à un ensemble de transformations. Au niveau programmation, il est plus facile de n'associer à une arête que des transformations élémentaires²⁴. Nous donnons à la figure 1.15(b) le graphe complet et optimal associé à la tête de l'oiseau.

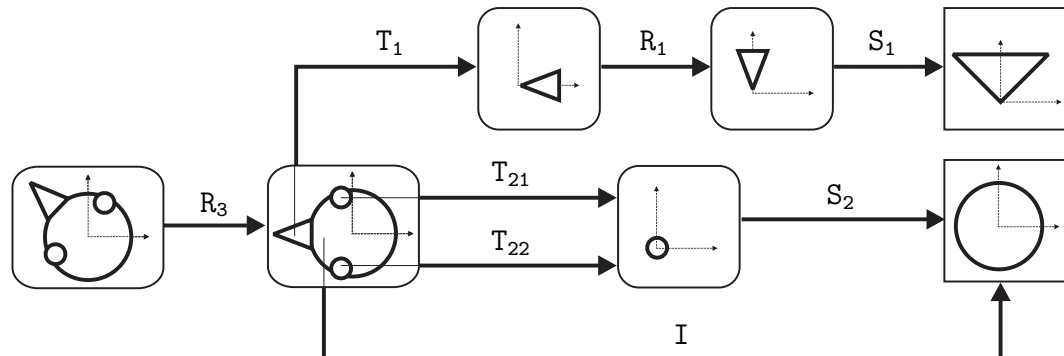
Par la suite, nous continuerons d'utiliser le terme de hiérarchie qui reflète bien l'idée naturelle de construction ascendante en lieu et place du terme de graphe orienté acyclique plus représentatif du codage machine.

²³*i.e.* signifie qu'il n'existe pas de boucles dans le graphe.

²⁴C'est le choix fait dans OpenGL.



(a) Construction hiérarchique d'un objet. Les objets élémentaires sont placés dans des carrés. Les nœuds sont représentés par des cercles, avec le résultat de l'ensemble des objets assemblés dans la sous-hiérarchie associée à ce nœud.



(b) Les transformations élémentaires présentes dans ce schéma sont la mise-à-l'échelle S , la rotation R , la translation T , et l'identité I . Le crâne de l'oiseau est une sphère unité. La rotation R_3 est une transformation supplémentaire permettant d'orienter la tête avant de l'associer au cou.

FIG. 1.15 – Exemple de hiérarchie. Chaque arête correspond à une transformation. (a) Principe général d'organisation hiérarchique. (b) Graphe orienté complet pour la tête.

5.1.2 Construction d'une scène

La mise en place d'une structure hiérarchique pour une scène est dans la continuité de la structure adoptée pour les objets complexes :

- A chaque feuille, un objet de la scène (par exemple l'oiseau de l'exemple de la figure 1.15).
- A chaque noeud un objet composé (par exemple, l'oiseau et son nid dans l'exemple 1.16).

En pratique, on utilise une structure hiérarchique globale : elle va des objets élémentaire à ses feuille jusqu'à la scène complète à la racine. L'ensemble des objets complexes représentés dans la scène sont dans ce cas représentés par des noeuds de la structure hiérarchique.

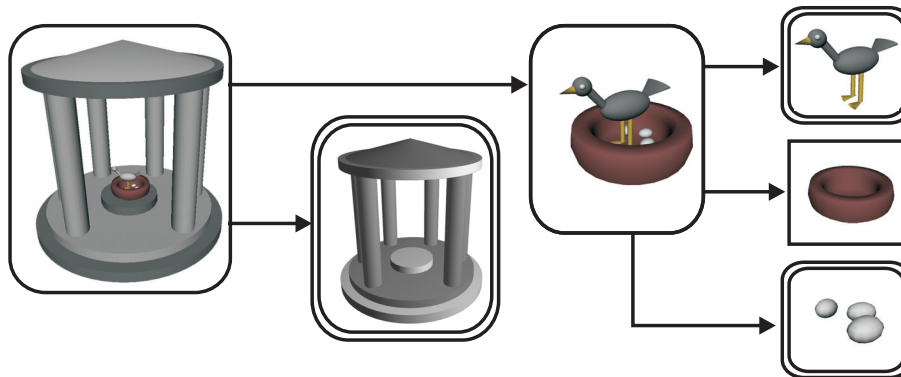


FIG. 1.16 – Construction hiérarchique d'une scène. Les objets complexes doublement encadrés correspondent soit à l'exemple précédent, soit à des objets complexes "simples" (les oeufs = 3 sphères, le temple rond = 10 cylindres et 1 cône).

5.1.3 Intérêt pratique des structures hiérarchiques

Cette décomposition possède d'importants avantages pratiques. La hiérarchie permet un stockage cohérent de l'ensemble des transformations associées à un objet. Elle permet de maintenir les contraintes structurelles des objets ou de la scène.

- L'ajout d'une transformation sur un noeud applique cette transformation sur toute la sous-arborescence associée au noeud (considérée alors comme une entité unique).
- La paramétrisation de certaines transformations permet d'apporter une dynamique : le déplacement des objets dans la scène, l'utilisation d'objets articulés (voir section 5.1.4) ou déformables, etc ...

- Le choix de l'arborescence a un impact important sur le rôle des objets dans la scène. Placer un objet à un niveau de l'arborescence revient à déterminer son rôle vis-à-vis de la scène. Par exemple, on se posera la question de savoir en quoi il est différent dans la figure 1.16 de placer l'oiseau comme frère du nid plutôt que comme frère du temple.

Une structure hiérarchique n'est pas en remplacement de la liste des objets, mais en complémentarité. Par souci d'efficacité, on stocke la matrice de transformation correspondant à la composition de l'ensemble des transformations effectuées depuis la racine, ainsi que son inverse. Ces deux matrices permettent de passer alternativement du repère local de l'objet au repère global de la scène.

5.1.4 Gestion d'articulations

La hiérarchie permet de gérer des systèmes d'articulations simples dans un objet complexe en paramétrant certaines des transformations. Si on reprend la figure 1.15, l'ajout d'une articulation entre la tête et le cou est réalisé en ajoutant une rotation²⁵ dont l'axe "lie" la tête au cou (voir figure 1.17(a)). Un objet complexe articulé peut ainsi se concevoir comme une hiérarchie paramétrée : à chaque articulation correspond une arête paramétrée. Il devient alors naturel de définir des objets complexes fonctionnels en vue de l'utilisation d'instances multiples d'objets complexes articulés mais indépendants dans leurs articulations.

Les contraintes des articulations se gèrent en choisissant les paramètres des transformations à des ensembles restreints. Par exemple, pour la rotation $R_1(\alpha)$ de la figure 1.17(a), le choix $\alpha \in (-80', +80')$ permet à la tête de regarder de droite à gauche, mais sans autoriser un retournement complet de la tête (voir figure 1.17(c)).

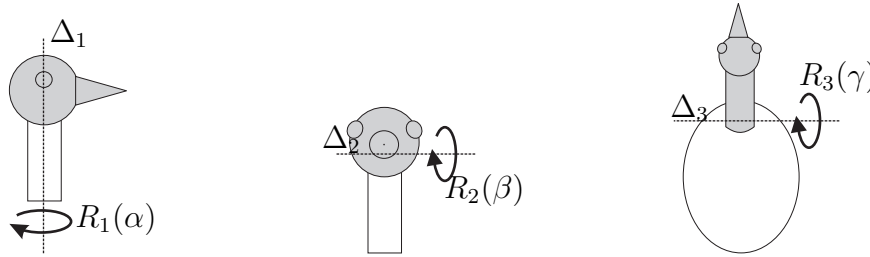
5.2 Algèbre sur des objets

La structure hiérarchique proposée dans la section précédente est basée sur l'opérateur d'union entre objets : chaque noeud représente une opération d'assemblage (une union). Nous présentons dans cette section une méthode de construction d'objets basée sur l'utilisation de plusieurs opérateurs différents : la méthode CSG (*constructive solid geometry*).

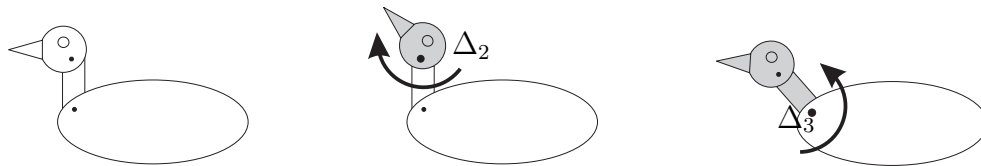
Nous définissons tout d'abord 3 opérateurs binaires (*i.e.* qui ne s'appliquent que sur deux objets quelconques - notés A et B par la suite) : l'**union** notée \cup , l'**intersection** notée \cap , et la **différence** notée $-$ (voir figure 1.18).

²⁵En fait, toute transformation modélisant correctement l'articulation ou un ensemble d'articulations

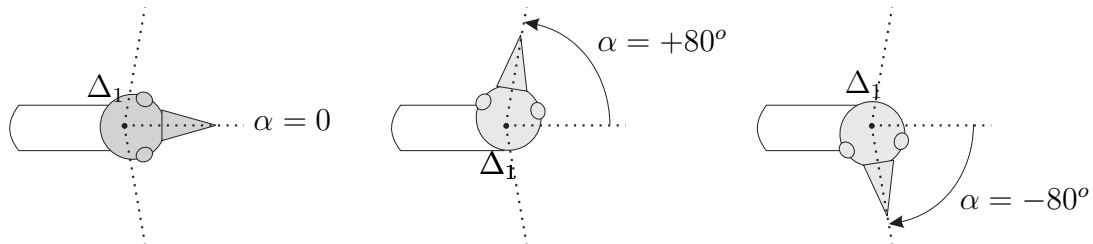
..



(a) Réalisation des articulations de la tête et du cou. La rotation $R_1(\alpha)$ d'axe Δ_1 permet une articulation horizontale de la tête (mouvement de gauche à droite). La rotation $R_2(\beta)$ d'axe Δ_2 permet une articulation verticale de la tête (mouvement de haut en bas). La rotation $R_3(\gamma)$ permet une articulation verticale du cou (mouvement du cou de haut en bas). Les rotations R_1 et R_2 sont associés au noeud "tête"; la rotation R_3 est associé au noeud "cou".



(b) Effet de la rotation à un noeud : elle s'applique à toute la hiérarchie représentée par le noeud (en grisé). Au milieu, rotation suivant l'axe Δ_2 pour le noeud correspondant à la tête. A gauche, rotation suivant l'axe Δ_3 pour le noeud correspondant à la tête + le cou. La totalité tourne, en gardant la position de la tête par rapport au cou.



(c) Contraintes sur l'articulation de la tête. On impose les valeurs de variations de l'angle α de la rotation $R_1(\alpha)$ d'axe Δ_1 comme devant se trouver dans l'intervalle $(-80^\circ, +80^\circ)$. A gauche, la zone des rotations autorisées est en grisée. Au centre, déplacement maximal de la tête à gauche. A droite, déplacement maximal de la tête à droite.

FIG. 1.17 – Utilisation d'une structure hiérarchique pour la gestion d'articulations.



- (a) Objets de base A et B .
 (b) $A \cup B$: la surface de l'objet obtenu est la fusion des surfaces externes de A et B .
 (c) $A \cap B$: la surface de l'objet obtenu est la fusion des surfaces internes de A et B .
 (d) $A - B$: la surface de l'objet obtenu est la fusion de la surface externe de A et de la surface interne de B .

FIG. 1.18 – Principe théorique des opérations CSGs. On appelle surface interne d'un objet A par rapport à l'objet B les portions de la surface de A qui sont contenus dans l'objet B . De même, on appelle surface externe de A les portions de surface de A qui ne sont pas incluses dans l'objet B .

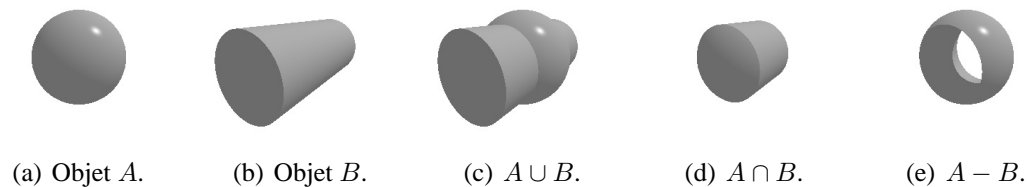
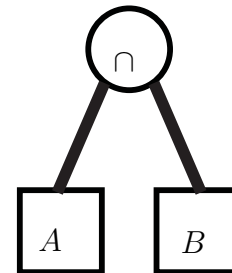


FIG. 1.19 – Exemple d'opération CSG sur des objets 3D.

Attention, il s'agit d'opérateurs véritables modifiant la géométrie même de l'objet. A ce titre, cette méthode ne s'applique donc que sur des objets **purement géométriques**, c'est-à-dire sans aucune propriété matérielle (matière, texture, ...) car on serait bien à mal de définir, par exemple, le résultat d'une intersection d'un objet en verre et d'un autre en papier à moins d'explicitier le rôle de l'opérateur sur ces propriétés.

Un objet complexe CSG peut également se représenter sous forme d'arbre. L'arbre se construit alors avec aux feuilles des objets géométriques élémentaires, et aux noeuds les opérateurs binaires (un noeud a donc toujours deux fils). Par exemple, l'arbre CSG associé à $A \cap B$ (présenté figure 1.19(d)) est présenté ci-contre.



L'implémentation pratique des opérations CSGs est relativement élémentaire. Elle consiste essentiellement à déterminer quelles sont les surfaces internes et externes pour chacun des objets, en utilisant les spécificités de la méthode de rendu (exercice !).

6 Annexe

6.1 systèmes de coordonnées

Nous utilisons en général les coordonnées cartésiennes pour représenter la position d'un point P dans l'espace tridimensionnel \mathbb{R}^3 . Elles sont naturellement le système de coordonnées le plus adapté dans une majorité de cas en synthèse d'image, car dans ce repère, les droites et les plans s'écrivent comme des formes linéaires :

- La description géométrique des objets fait souvent appel à une version facettisée (approximation locale de la surface par des plans) des objets.
- Les méthodes de rendu utilisent elles aussi fortement des propriétés linéaires (le Z -buffer utilise intensivement la description polygonale des objets, le lancé de rayon calcule des intersections de droites avec les objets de la scène, la radiosité décompose la scène en un maillage polygonal).
- La position et l'orientation dans un repère cartésien se juxtapose facilement avec la conception humaine intuitive de l'espace.

Le repère à utiliser dépend évidemment du problème, et dans certains cas, il est plus avantageux de travailler dans d'autres types de repères.

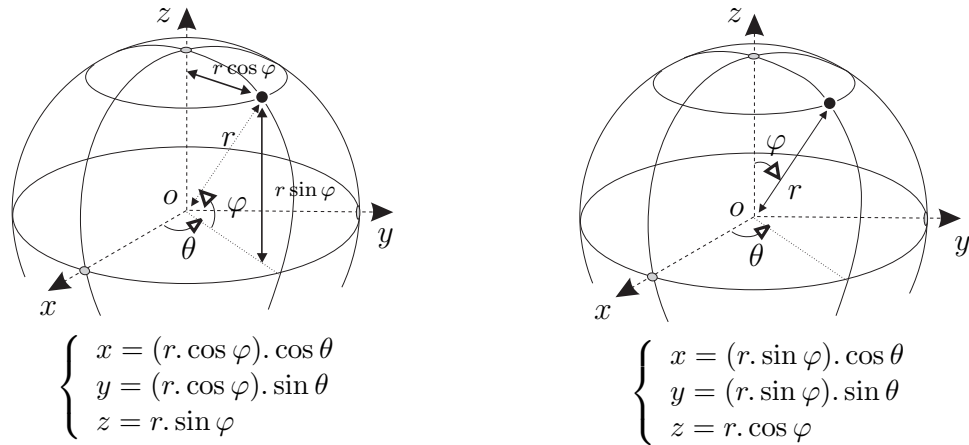
Remarque préliminaire :

- les changements de système de coordonnées est présenté ici dans le repère canonique $Oxyz$. Autrement dit, on ne change ici que l'interprétation des coordonnées d'un point, et non pas sa position géométrique. On reste donc dans un repère carthésien.
 - conséquence annexe : le changement de coordonnées est une opération bijective.
- Nous donnons dans cette partie l'exemple des coordonnées sphériques .

Définition des coordonnées sphériques : les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) d'un point P expriment sa position relativement à l'ensemble des sphères centrées au centre O du repère :

- r est le rayon de la sphère sur laquelle le point est placé (donc $\|P\| = r$).
- (θ, ϕ) permettent de repérer la position de P sur cette sphère (comme par exemple, avec la longitude et la latitude).

Les expressions ci-dessous indiquent le passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes.



avec $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.
 (a) coordonnées sphériques (référence au plan Oxy)

avec $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\varphi \in [0, \pi]$.
 (b) coordonnées sphériques (référence à l'axe z)

FIG. 1.20 – Les deux principales manières pour la définition des coordonnées sphériques. r =distance au centre du repère, (a) $(\theta, \varphi) = (\text{longitude}, \text{latitude})$, (b) $(\theta, \varphi) = (\text{longitude}, \text{élévation})$.

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques se fait par inversion (cas pour les coordonnées latitude-longitude) :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \\ \phi = \arccos(z/r) \end{cases}$$

où $\arctan(y/x)$ est calculé avec la fonction `atan2(y, x)`.

Utilisations courantes

- pour texturer une sphère, les coordonnées sphériques permettent de créer une bijection entre $[0, 2\pi[\times]-\pi/2; +\pi/2]$ et l'équation paramétrique d'un plan.
- pour $r = 1$, on obtient l'ensemble des vecteurs unitaires (et donc l'ensemble des directions) en faisant varier (θ, φ) sur leurs intervalles de définition respectifs.

Index

- équation
 - cartésienne, 44
 - implicite, 44
 - paramétrique, 45
- angles d'Euler, 26
- appareil photographique, 30
- application linéaire
 - sur un vecteur, 8
- articulation, 64
- axe optique, 38
- barycentre, 11
 - conservation, 17
- base orthonormée, 7
- base vectorielle, 7
- cône
 - forme carthésienne et paramétrique, 52
- cône de vision, 39
- centre de projection, 35
- champ de vision, 39
- changement d'échelle, 24
- changement de repère, 25
 - espace affine, 14
 - espace vectoriel, 13
- cisaillement, 25
- classe de transformations, 16
- constructive solid geometry, 64
- coordonnées
 - sphériques, 67
 - coordonnées cartésiennes, 43
 - coordonnées homogènes, 18
- CSG, 64
- cylindre
 - forme carthésienne et paramétrique, 51
- disque
 - forme carthésienne et paramétrique, 52
- distance focale, 39
- droite
 - forme carthésienne et paramétrique, 50
- espace affine
 - base, 7
 - changement de repère, 14
 - définition, 6
 - repère, 7
 - repère canonique orthonormé, 8
- espace projectif, 18
- espace vectoriel
 - changement de repère, 13
 - définition, 6
 - repère canonique orthonormé, 8
- facette
 - forme carthésienne et paramétrique, 53
- film photographique virtuel, 41
- Gimbal Lock, 26

- grille de l'écran, 41
- identité, 22
- interpolation linéaire, 12
- interpolation sphérique linéaire, 28
- isométrie, 16
- lentille, 43
- matrice
 - orthogonale, 16
- mise en perspective, 33
- normale à une surface, 46
 - cas carthésien, 47
 - cas paramétrique, 48
- normalisation d'un vecteur, 9
- norme d'un vecteur, 9
- objet complexe, 59
- opération CSG, 66
- pellicule, 38, 43
- pile de transformations, 60
- pinhole camera, 38
- Pitch, 26
- plan de projection, 35
- plane
 - forme carthésienne et paramétrique, 49
- point nodal, 38
- produit scalaire, 9
- produit vectoriel, 10
- projection à un point, 35
- projection parallèle), 34
- quaternion, 27
 - interprétation, 27
 - matrice de rotation associée, 29
- repère
 - de l'observateur, 31
 - construction, 32
 - global, 31
 - local, 31
 - Roll, 26
 - rotation, 22
- scène
 - modèle hiérarchique, 59
 - structure hiérarchique, 63
- shearing, 25
- similitude, 16
- sler, 29
- sphère
 - forme carthésienne et paramétrique, 51
- surface
 - extérieur, 45
 - intérieur, 45
 - intersection avec une courbe, 46
 - représentation, 46
- symétrie, 23
- tangente à une surface, 46
 - cas carthésien, 47
 - cas paramétrique, 48
- transformation
 - affine, 16
 - affine générale, 17
 - changement d'échelle, 24
 - changement d'orientation, 28
 - cisaillement, 25
 - commutativité, 20
 - composition, 18
 - composition de coordonnées homogènes, 20
 - composition de deux rotations, 27
 - d'observation, 31
 - euclidienne, 16

- généralisation, 30
- globale, 31
- identité, 22
- inversible, 20
- inversion, 20
- orthogonale, 16
- projective, 17
- projective en coordonnées homogènes, 37
- rigide, 16
- rotation, 22
- rotation associée à un quaternion, 29
- rotation d'un vecteur, 28
- shearing, 25
- symétrie, 23
- utilisations, 18
- transformation affine, 11
 - coordonnées homogènes, 18
 - d'un objet, 54
 - équation, 55
 - dans le repère global, 54
 - dans le repère local, 54
 - transformation des normales, 57
 - en coordonnées homogènes, 20
- transformation d'Euler, 26
- transformation projective
 - coordonnées homogènes, 19
 - en coordonnées homogènes, 20
- vecteur
 - changement d'échelle, 8
- view transform, 31
- vitesse d'obturation, 43
- world transform, 31
- Yaw, 26